

现代数学丛书

多复变数的奇异积分

劉 昇 著

上海科学技术出版社

21

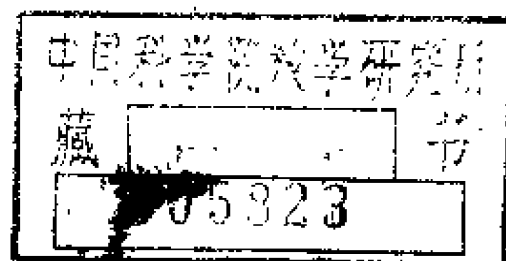
23

51.6221
11

现代数学丛书

多复变数的奇异积分

龚昇 著



上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是现代数学丛书中的一种,汇集了作者从1964年起同他的合作者在这一领域中的科研成果,内容包括绪论,超球的Cauchy型积分,复超球面上的奇异积分方程,复超球面的Hadamard主值,Lie球双曲空间的Cauchy型积分,矩阵双曲空间的Cauchy型积分,强拟凸域的Henkin型积分等七章。本书供高等学校数学系高年级学生、研究生及这方面的数学科研人员参考。

现代数学丛书

多复变数的奇异积分

龚昇 著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本860×1156 1/32 印张9 字数218,000

1982年11月第1版 1982年11月第1次印刷

印数: 1-12,800

统一书号: 13119·1040 定价(科五) 1.35元

Singular Integral in Several Complex Variables

This monograph collects the works of the author and his colleagues in singular integrals of several complex variables since 1964. The kernels that give rise to such singular integrals on the boundaries of the domain are Cauchy-Fantappiè kernels and Szegő Kernels. A brief description of these kernels is given as a preliminary in the introduction of the book. In the first chapter, the author starts from the most important simply connected irreducible domain, i.e., the ball in C^n , and makes an extensive investigation on the integral of Cauchy type on the hypersphere. The author's conclusion shows that, quite different from the case of one complex variable, there are many ways to define the principle value of Cauchy integral, and accordingly, various forms of Plemelj formula are obtained. With these results as a tool, the author advances the theory of singular integral equations with constant coefficients and variable coefficients on the hypersphere in chapter two. This was something completely new at that time. In chapter three, the concept of Hadamard principle value is extended to the space of several complex variables. They define the Hadamard principle value of singular integral on hypersphere, in terms of which, the limiting values of the derivative of the Cauchy integral can then be expressed. The next two chapters deal with the Cauchy integral on two kinds of classical domains defined by prof. L.K. Hua. The author points out that the limiting value of the integral on the characteristic manifold is essentially different from that on the other parts of the boundary. Finally, in chapter six, the Cauchy integrals defined by Henkin-Ramirez kernel and Stein-Kerzman kernel of the strictly pseudo convex domains are studied, and generalized Plemelj formula is obtained.

《现代数学丛书》编辑委员会

主任委员 华罗庚

副主任委员 苏步青 江泽涵 关肇直 吴文俊

委 员 王梓坤 王湘浩 叶彦谦 许国志

安其春 李国平 吴大任 吴新谋

严志达 谷超豪 柯 召 段学复

赵访熊 胡世华 夏道行 曹锡华

程民德 (以姓氏笔划为序)

目 录

绪论	1
§ 0.1 引言	1
§ 0.2 Cauchy-Szegö 核	3
§ 0.3 Cauchy-Fantappiè 核	9
§ 0.4 Henkin-Ramirez 核与 Stein-Kerzman 核	12
第一章 超球的 Cauchy 型积分	15
§ 1.1 引言	15
§ 1.2 一条引理	16
§ 1.3 Cauchy 主值	22
§ 1.4 Cauchy 型积分的极限值	25
§ 1.5 Cauchy 型积分的极限函数的连续性质	29
§ 1.6 定理 1.4.2 的推广	33
§ 1.7 引理 1.6.1 的证明	35
§ 1.8 另一种 Cauchy 主值	47
§ 1.9 引理 1.8.1 的证明	48
§ 1.10 K -极限	54
第二章 复超球面上的奇异积分方程	57
§ 2.1 引言	57
§ 2.2 含有 Cauchy 核的复合奇性积分公式	58
§ 2.3 B -核与 h -核, B -型积分与 h -型积分	62

§ 2.4 含有 h -核的复合奇性积分公式	68
§ 2.5 算子 H, B, h	73
§ 2.6 有 Cauchy 核的奇异积分方程	77
§ 2.7 有 B -核和 h -核的奇异积分方程	79
§ 2.8 一些例外情形	83
§ 2.9 有 B -核和 h -核的奇异积分方程(续)	85
§ 2.10 有 Cauchy 核的奇异积分方程组	87
§ 2.11 有 B -核与 h -核的奇异积分方程组	89
§ 2.12 复超球面上变系数的奇异积分方程	94
§ 2.13 置换公式	113
§ 2.14 正则化	125
§ 2.15 某些方程的直接求解	130
第三章 复超球面上的 Hadamard 主值	137
§ 3.1 引言	137
§ 3.2 几条引理	139
§ 3.3 Hadamard 主值	148
§ 3.4 含有 Hadamard 主值的 Plemelj 公式	154
§ 3.5 复超球面上 Cauchy 型积分的导数	156
§ 3.6 部分特殊点处的极限值	164
§ 3.7 用 Hadamard 主值表示边界值	167
第四章 Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分	184
§ 4.1 引言	184
§ 4.2 二条引理	186
§ 4.3 在 $\mathcal{S}_{IV}-\mathcal{L}_{IV}$ 上的 Cauchy 主值	194
§ 4.4 Cauchy 型积分在 $\mathcal{S}_{IV}-\mathcal{L}_{IV}$ 上的极限值	205
§ 4.5 B 调和函数的边界值	211
§ 4.6 Cauchy 型积分在 \mathcal{L}_{IV} 上的极限值	213
第五章 矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分	227
§ 5.1' 引言	227
§ 5.2 Cauchy 型积分在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上的极限值	229
§ 5.3 一条引理	235
§ 5.4 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 的 Cauchy 型积分在 $\mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 上的极限值	237

§ 5.5 $\mathscr{H}_I(m, n)$ 内的 B -调和函数的边界性质	246
第六章 强拟凸域的 Henkin 型积分	251
§ 6.1 引言	251
§ 6.2 一般的 Plemelj 公式	252
§ 6.3 $b\Omega$ 上的奇异积分	256
§ 6.4 当邻域是椭圆的情形	259
§ 6.5 当邻域是矩形的情形	266
§ 6.6 关于 Bochner-Martinelli 型积分	274
参考文献	276

绪 论

§ 0.1 引 言

1964年起,我与孙继广同志一起研究了多复变数的 Cauchy 型积分以及奇异积分方程.十年浩劫,前后中断了十多年,1979年起,我与史济怀同志一起重新开始继续研究多复变数的奇异积分这个课题.多复变数的奇异积分是多复变数函数论中一个重要而活跃的分支,内容丰富^{*}),我无意在这本书中,对国内外的成果作全面的介绍与论述.这本书的主要内容,只是我与我的合作者在这方面所做研究工作的一个阶段性小结.

Cauchy 型积分在复变数函数论中的重要性已毋庸多说,它不但有着函数论本身的重要意义,而且是奇异积分方程、边界值问题等学科中不可缺少的工具.最基本最简单的不可约域之一是超球,所以本书从研究 \mathbb{C}^n 中超球的 Cauchy 型积分开始.有趣的是:与单复变数时不一样,在多复变数时,有多种的 Cauchy 主值,以及多种式样的 Plemelj 公式,这是第一章的内容.

众所周知,一维的奇异积分方程是以单复变数的 Cauchy 型积

^{*} 例如可参阅 Kerzman[1],此文对多复变数的奇异积分的最近发展作了很好的介绍.

分作为主要工具的. 第二章的内容是将第一章中所得到的有关 \mathbb{C}^n 中超球的 Cauchy 型积分的结果, 应用到高维奇异积分方程中去, 建立了 \mathbb{C}^n 中复超球面上的奇异积分方程理论. 这项工作, 在当时也许是首次将多复变数的 Cauchy 型积分作为工具来研究高维奇异积分方程, 因为在以往高维奇异积分方程的研究中似乎均未用到多复变数的 Cauchy 型积分.

作为奇异积分的 Cauchy 主值的推广, Hadamard 考虑了高阶发散奇异积分的有限部分, 并用此来解双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题. Fox 将此想法推广到复平面. 在第三章中, 将 Hadamard 主值的概念推广到多复变数空间, 研究了 \mathbb{C}^n 中复超球面上的 Hadamard 主值, 并用此来研究超球的 Cauchy 型积分的导数.

E. Cartan 证明了: 在 \mathbb{C}^n 中可递的不可约的有界对称域仅有六种可能性, 其中四类为典型域, 二类例外域. 华罗庚在他的名著《多复变数函数论中的典型域的调和分析》一书中, 对此作了十分深刻的研究. 在这基础上, 对典型域的 Cauchy 型积分进行研究是第四章及第五章的内容. 在第四章中讨论了第四类典型域的 Cauchy 型积分, 即 Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分. 在第五章中讨论了第一类典型域的 Cauchy 型积分, 即矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分. 可以看出, 这两章的工作是与前面几章相关联的. 还可以看出, 当点从区域内部趋于特征流形时, Cauchy 型积分的极限值只有一种表达形式, 而趋于边界的其余部分时, 其表达形式仍是多样的.

全纯域一定是拟凸域, 而 Levi 猜想指出, 拟凸域一定是全纯域, 所以拟凸域在多复变数中成为十分重要的研究对象. 在本书的最后一章中, 对于强拟凸域的 Henkin-Ramirez 核及 Stein-Kerzman 核所定义的 Henkin-Ramirez 型积分及 Stein-Kerzman 型积分进行了研究, 得到一些也许是有趣的结果. 在第一章中所

提到的那种现象,即当点趋于边界时,相应的奇异积分的极限值的表达方式是多样的,在这里,这种现象依然发生.至于非强拟凸域,由于它与强拟凸域是有本质上的区别的,它的奇异积分还有待于进一步的探讨.在这一章的最后,对一般域上的 Bochner-Martinelli 型积分顺便进行了讨论,主要指出:这时候,上述现象,不再发生.

本书的内容取自龚昇[1],[2],龚昇、孙继广[1],[2],[3],[4],[5],龚昇、史济怀[1],[2],[3],[4],[5],孙继广[1]以及史济怀[1].

多复变数函数的积分表示的核是很多的,同样多复变数的奇异积分也是很多的,但以上所讨论的也许是一些最主要的核所定义的奇异积分.

由于作者水平有限,写得也很匆忙,一定有不少不妥甚至错误之处,希望能得到读者的批评与指正.

§ 0.2 Cauchy-Szegő 核

在多复变数中,没有与单复变数完全相当的 Cauchy 核.人们从各种不同的观点来推广单复变数的 Cauchy 核到多复变数中去.

一种重要的观点是从 Hilbert 空间的观点来看待 Cauchy 核.

考虑 \mathbb{C} 中单位圆 $|z| < 1$, 边界为 $w = e^{i\theta}$, 则 Cauchy 核

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{1-ze^{-i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-in\theta} d\theta.$$

显然, $\left\{ \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}} \right\} (n=0, 1, 2, \dots)$ 是 $|z| < 1$ 中解析的函数类的完备正交系; 而 $\left\{ \frac{w^n}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ 是在 $|w|=1$ 上的连续函数的就范正交系. 这样就可得到: 在 $|z| \leq 1$ 上连续, 在 $|z| < 1$ 中解析的函数, 可以用 Cauchy 积分表达之, 即 Cauchy 核对这类函数有再生性质. 在这

种观点下得到的核,称为 Cauchy-Szegö 核. 当 \mathbb{C} 中的区域不是单位圆时,所得的 Cauchy-Szegö 核就不再是 $\frac{1}{2\pi i} \frac{dw}{w-z}$.

因之,想把单复变数的 Cauchy-Szegö 核推广到多复变数空间 \mathbb{C}^n 中的域 Ω 上去,只要找到 \mathbb{C}^n 中的一组函数 $\{\varphi_\nu(z)\}$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$), $\{\varphi_\nu(z)\}$ 在 Ω 中,对 Ω 中的解析函数类而言,组成完备正交系,在 Ω 的边界 $b\Omega$ 上(或其中一部分,如特征流形上), $\{\varphi_\nu(z)\}$ 是就范正交的,如果 $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(w)}$ ($z \in \Omega, w \in b\Omega$) 一致收敛,则这就是所要的 Cauchy-Szegö 核.

华罗庚[1]证明了:若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, Ω 是圆型、有界、单连通域,包有原点,且对原点而言是星状的, Ω 的特征流形为 \mathcal{L} , 且 \mathcal{L} 也是圆型的、紧致的,那末 Ω 的 Cauchy-Szegö 核是存在的. 他给出了 $\varphi_\nu(z)$ 的具体作法,这时, $\varphi_\nu(z)$ 均为 z 的齐次多项式,从而可以具体地作出 Cauchy-Szegö 核来,例如他给出了 \mathbb{C}^n 中超球的 Cauchy-Szegö 核.

若 $z=(z_1, \dots, z_n)$, $u=(u_1, \dots, u_n)$, 且 $z\bar{z}' < 1$, $u\bar{u}' = 1$, 则 $z\bar{z}' < 1$ 的 Cauchy-Szegö 核为

$$\omega_{2n-1}^{-1} (1 - z\bar{u}')^{-n} \dot{u}, \quad (0.2.1)$$

这里 ω_{2n-1} 为 $u\bar{u}' = 1$ 的体积,它等于 $\frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}$, \dot{u} 为 $u\bar{u}' = 1$ 的体积元素.

超球的 Cauchy-Szegö 核是十分简洁的,但是对于这样一个重要的不可约域,正如 W. Rudin 在[1]中所指出的,直到 1958 年华罗庚的名著[1]出版之前,谁也没有写出这个核来.

不但如此,华罗庚在[1]中应用群表示论,具体给出了四类典型域的 Cauchy 核,详细请参阅他的原著.

对于前述华罗庚所讨论的圆型域,我们还证明了:凡在 Ω 内解析的函数 $f(z)$,如果属于 Hardy 族 H_1 ,则可表为 Cauchy 积分

和 Schwarz 积分, 而且 $f(z) \in H_1$ 是 $f(z)$ 可表为 Poisson 积分的充要条件. (龚昇, 孙继广[1].)

由于这些结果以后要用到, 我们给予证明如下.

若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, Ω 满足上述条件, \mathcal{L} 是它的特征流形, 称 Ω 内解析的函数 $f(z)$ 属于 Hardy 族 H_1 , 若

$$\int_{\mathcal{L}} |f(r\xi)|^2 \xi$$

对 $0 \leq r < 1$ 一致有界, 这里 $\xi \in \mathcal{L}$, ξ 表示 \mathcal{L} 的体积元素. 我们有

定理 0.2.1 若 $f(z) \in H_1$, 则 $f(z)$ 可以表为 Cauchy 积分.

证 华罗庚[1]证明了: 对于上述圆型域 Ω , 存在一组完备正交函数系 $\psi_m(z)$, 它在 \mathcal{L} 上是就范正交的, 于是 Ω 的 Cauchy 核 (Cauchy-Szegö 核, 简称 Cauchy 核, 下同) $H(z, \bar{\xi})$ 等于

$$\sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(z) \overline{\psi_m(\xi)}, \quad (0.2.1)$$

这里 $z \in \Omega$, $\xi \in \mathcal{L}$, 而每一个 $\psi_m(z)$ 为齐次多项式. 由假设 $f(z) \in H_1$, 根据 Bochner[1]的一条定理知道, 境界值 $f(\xi)$ 绝对可积. 于是作 Cauchy 型积分

$$g(z) = \int_{\mathcal{L}} f(\xi) H(z, \bar{\xi}) \xi,$$

它是存在的, 并且表示一个对 z 的解析函数. 由 Cauchy 核的定义, 知

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(z) \int_{\mathcal{L}} f(\xi) \overline{\psi_m(\xi)} \xi,$$

这是因为固定 z 时, 级数 (0.2.1) 的收敛对 ξ 是一致的. 记

$$C_m = \int_{\mathcal{L}} f(\xi) \overline{\psi_m(\xi)} \xi, \quad (0.2.2)$$

于是

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(z).$$

因为 $f(z)$ 在 Ω 内解析, 故有 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi_m(z),$$

取 $z = r\eta$, $\eta \in \mathcal{L}$, $0 < r < 1$, 由于 ψ_m 为齐次多项式, 设其次数为 k_m , 则

$$f(r\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{k_m} \psi_m(\eta).$$

当 $r < 1$ 固定时, 它对 η 在 \mathcal{L} 上的收敛是一致的. 于是

$$\int_{\mathcal{L}} f(r\xi) \overline{\psi_m(\xi)} \xi = \int_{\mathcal{L}} \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^{k_l} \psi_l(\xi) \overline{\psi_m(\xi)} \xi = r^{k_m} a_m. \quad (0.2.3)$$

由 (0.2.2), (0.2.3) 得

$$O_m - a_m r^{k_m} = \int_{\mathcal{L}} (f(\xi) - f(r\xi)) \overline{\psi_m(\xi)} \xi.$$

因而 $|O_m - a_m r^{k_m}| \leq M_m \int_{\mathcal{L}} |f(\xi) - f(r\xi)| \xi$,

此处 $M_m = \max_{\xi \in \mathcal{L}} |\psi_m(\xi)|$. 由于 ψ_m 为齐次多项式, \mathcal{L} 是紧致的, 故

M_m 是存在的. 令 $r \rightarrow 1$, 由 Riesz 定理知 $O_m = a_m$, 故 $g(z) = f(z)$,

即 $f(z)$ 可以用 Cauchy 积分表达

$$f(z) = \int_{\mathcal{L}} f(\xi) H(z, \bar{\xi}) \xi, \quad (0.2.4)$$

证毕.

如果 $f(z) \in H_1$, 则由定理 0.2.1, 它可表为 Cauchy 积分, 即 (0.2.4) 成立. 固定 $w \in \Omega$ 时, $f(z) H(z, \bar{w})$ 也属于 H_1 , 故由 (0.2.4),

$$\int_{\mathcal{L}} f(\xi) H(\xi, \bar{w}) \xi = f(0).$$

取共轭, 得

$$\int_{\mathcal{L}} \overline{f(\xi)} H(w, \bar{\xi}) \xi = \overline{f(0)}. \quad (0.2.5)$$

在 (0.2.5) 中取 $w = z$, 于是

$$\int_{\mathcal{L}} (f(\xi) + \overline{f(\xi)}) H(z, \bar{\xi}) \xi = f(z) + \overline{f(0)},$$

$$\begin{aligned}
 \text{即} \quad f(z) &= \int_{\mathcal{L}} (f(\xi) + \overline{f(\xi)}) H(z, \bar{\xi}) \xi \\
 &\quad - \frac{1}{2} (f(0) + \overline{f(0)}) + i \operatorname{Im} f(0) \\
 &= \int_{\mathcal{L}} (f(\xi) + \overline{f(\xi)}) H(z, \bar{\xi}) \xi \\
 &\quad - \frac{1}{2V(\mathcal{L})} \int_{\mathcal{L}} (f(\xi) + \overline{f(\xi)}) \xi + i \operatorname{Im} f(0),
 \end{aligned}$$

这里 $V(\mathcal{L})$ 表示 \mathcal{L} 的体积. 所以, 若记 $f(z) = u(z) + i v(z)$, 则有

$$f(z) = \int_{\mathcal{L}} u(\xi) \left(2H(z, \bar{\xi}) - \frac{1}{V(\mathcal{L})} \right) \xi + i \operatorname{Im} f(0).$$

我们称

$$S(z, \bar{\xi}) = 2H(z, \bar{\xi}) - \frac{1}{V(\mathcal{L})} \quad (0.2.6)$$

为 Ω 的 Schwarz 核. 于是有

定理 0.2.2 若 $f(z) \in H_1$, 则 $f(z)$ 可以表为 Schwarz 积分

$$f(z) = \int_{\mathcal{L}} u(\xi) S(z, \bar{\xi}) \xi + i \operatorname{Im} f(0), \quad (0.2.7)$$

其中 $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $S(z, \bar{\xi})$ 如 (0.2.6) 所示.

华罗庚从 Cauchy 核出发, 定义

$$P(z, \bar{\xi}) = \frac{H(z, \bar{\xi}) H(\xi, \bar{z})}{H(z, \bar{z})} \quad (0.2.8)$$

为 Poisson 核, 并称由 \mathcal{L} 上的连续函数 $u(\xi)$ 所定义的 Poisson 积分 $\int_{\mathcal{L}} u(\xi) P(z, \bar{\xi}) \xi$ 为调和函数.

由定理 0.2.1, 可得

定理 0.2.3 若 $f(z)$ 在 Ω 中解析, 则 $f(z)$ 可以表为 Poisson 积分

$$f(z) = \int_{\mathcal{L}} f(\xi) P(z, \bar{\xi}) \xi \quad (0.2.9)$$

的充分必要条件为 $f(z) \in H_1$.

证 充分性. 若 $f(z) \in H_1$, 则当 w 固定时, 易见

$$f(z) H(z, \bar{w}) \in H_1,$$

故由定理 0.2.1, 有

$$f(z)H(z, \bar{w}) = \int_{\mathcal{L}} f(\xi)H(\xi, \bar{w})H(z, \bar{\xi})\dot{\xi}.$$

特别取 $w=z$, 除以 $H(z, \bar{z})$ 即得(0.2.9).

必要性. 若 $f(z)$ 可以表为(0.2.9), 取 $z=r\eta$ ($0 \leq r < 1$), $\eta \in \mathcal{L}$, 则

$$\int_{\mathcal{L}} |f(r\eta)|\dot{\eta} \leq \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{L}} |f(\xi)|P(r\eta, \xi)\dot{\xi}\dot{\eta}. \quad (0.2.10)$$

由于 $P(r\eta, \xi) = P(r\xi, \eta)$, 故(0.2.10)的右端为

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{L}} |f(\xi)|P(r\xi, \eta)\dot{\xi}\dot{\eta} &= \int_{\mathcal{L}} \left(\int_{\mathcal{L}} P(r\xi, \eta)\dot{\eta} \right) |f(\xi)|\dot{\xi} \\ &= \int_{\mathcal{L}} |f(\xi)|\dot{\xi}, \end{aligned}$$

所以 $f(z) \in H_1$. 这里的积分次序能够交换是因为 $|f(\xi)|$ 可积, 而且当 $0 < r < 1$ 固定时, $P(r\xi, \eta)$ 对 ξ, η 在 \mathcal{L} 上是连续的, 这里同时利用了 Poisson 核的性质

$$\int_{\mathcal{L}} P(z, \xi)\dot{\xi} = 1 \quad (z \in \Omega).$$

在单复变数时, Poisson 核为 Schwarz 核的实部. 在现在一般来说是不对的, 因为调和函数未必是解析函数的实部. Schwarz 核的实部为

$$B(z, \xi) = H(z, \bar{\xi}) + H(\xi, \bar{z}) - \frac{1}{V(\mathcal{L})}, \quad (0.2.11)$$

虚部为

$$O(z, \xi) = \frac{1}{i}(H(z, \bar{\xi}) - H(\xi, \bar{z})). \quad (0.2.12)$$

从 Schwarz 公式, 即得: 若 $f(z) = u(z) + iv(z) \in H_1$, 则

$$u(z) = \int_{\mathcal{L}} u(\xi)B(z, \xi)\dot{\xi}, \quad (0.2.13)$$

$$v(z) = \int_{\mathcal{L}} u(\xi)O(z, \xi)\dot{\xi} + \operatorname{Im} f(0). \quad (0.2.14)$$

从(0.2.13)、(0.2.14)可得,若 $f(z) \in H_1$, 则

$$f(z) = \int_{\mathcal{L}} f(\xi) B(z, \xi) \bar{\xi}, \quad (0.2.15)$$

$$f(z) = i \int_{\mathcal{L}} f(\xi) C(z, \xi) \bar{\xi} + f(0). \quad (0.2.16)$$

即当 $f(z) \in H_1$ 时, $f(z)$ 可以用 $B(z, \xi)$, $C(z, \xi)$ 为核的积分表示之. B -调和函数也能用这些核来表达, 问题在于对 B -调和函数来讲, Dirichlet 问题未必有解, 并且容易看出 $B(z, \xi)$ 、 $C(z, \xi)$ 都不是正的. 例如, 若 $\eta \in \mathcal{L}$, 则 $B(r\eta, -\eta)$ 等于

$$\frac{2}{V(\mathcal{L})} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+n-1}^m (-r)^m - \frac{1}{V(\mathcal{L})} = \frac{1}{V(\mathcal{L})} \left(\frac{2}{(1+r)^n} - 1 \right),$$

若 $n > 1$, 且 r 充分接近 1 时, 这是小于零的.

关于 Poisson 积分的进一步研究, 请参阅华罗庚[1], 华罗庚与陆启铿[1]以及龚昇、史济怀[1]等.

一般来说, 对于 \mathbb{C}^n 中的域, 很难将 Cauchy-Szegö 核明确地写出来. 但对于强拟凸域(见 § 0.4), Fefferman[1]及 Boutet de Monvel-Sjöstrand[1] 得出如下的重要结果:

若 Ω 为强拟凸域, 则当 $z \in \bar{\Omega}$, $w \in b\Omega$, $z \neq w$ 时, Cauchy-Szegö 核 $H(z, w)$ 对 z, w 而言均属于 C^∞ , 且

$$H(z, w) = F(z, w) \psi^{-n}(z, w) + G(z, w) \log \psi(z, w),$$

这里 $F, G, \psi \in C^\infty(\bar{\Omega} \times b\Omega)$, ψ 由 $b\Omega$ 明确地表达出来. 若 $z \neq w$, 则 $\operatorname{Re}(\psi(z, w)) > 0$; 当 $w \in b\Omega$ 时, $F(w, w) \neq 0$.

这就明确地给出当 $z = w$ 时, $H(z, w)$ 的奇性.

§ 0.3 Cauchy-Fantappiè 核

另一种重要观点是从外微分形式的观点来看待 Cauchy 核.

由于当 $z \neq w$ 时,

$$d \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w-z} dw \right) = 0,$$

这里 d 是对 w 作用, 所以应用 Stokes 定理, 立即可以得到 Cauchy 积分定理.

于是从外微分形式的观点, 问题成为: 对于 \mathbb{C}^n 中的域 Ω , 可否找到一个外微分形式,

(i) 对在 Ω 中解析, 在 $\bar{\Omega}$ 上连续的函数 $f(z)$, 具有再生性质

$$f(z) = \int_{w \in b\Omega} H(z, w) f(w) d\sigma_w, \quad z \in \Omega, \quad (0.3.1)$$

这里 $d\sigma_w$ 为 $b\Omega$ 上的 Lebesgue 面积.

(ii) (0.3.1) 当 $z \in \Omega$ 时不是奇异积分, 而 $z \in b\Omega$ 时为奇异积分.

(iii) 当 $z \in \bar{\Omega}$, $w \in b\Omega$, $w \neq z$ 时, $H(z, w) \in C^\infty$, 对每个 $w \in b\Omega$, $H(z, w)$ 在 $z \in \bar{\Omega} - \{w\}$ 中解析.

(iv) 可以用 Stokes 定理.

在这方面最重要的核是 Cauchy-Fantappiè 核. 设 U 为 \mathbb{C}^n 中任意开集, $z \in \mathbb{C}^n$ 为固定参数, $g_1(z, w), \dots, g_n(z, w)$ 是在 $w \in U$ 上的 C^∞ 的 w 的复值函数. Cauchy-Fantappiè 形式 (简称为 C-F 形式) 为

$$K(z, w) \equiv \frac{C_n}{g^n} \omega dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n, \quad (0.3.2)$$

此处
$$g(z, w) = \sum_{i=1}^n (w_i - z_i) g_i(z, w),$$

$$\begin{aligned} \omega = & g_1 \bar{\partial} g_2 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} g_n - g_2 \bar{\partial} g_1 \wedge \bar{\partial} g_3 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} g_n \\ & + \dots + (-1)^{n-1} g_n \bar{\partial} g_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial} g_{n-1}, \end{aligned}$$

$$C_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)! (2\pi i)^{-n}.$$

$K(z, w)$ 为 w 的 $(n, n-1)$ 形式, 以 z 为参数, 在使 $g(z, w) \neq 0$ 的 U 的子集上定义.

可以证明 (Koppelman [1]): 若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为有界、光滑域, 当 $z \in \Omega$, w 在 $b\Omega$ 的邻域时, $K(z, w)$ 为一 C-F 形式. 若 f 在 Ω 中解析, 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 则

$$f(z) = \int_{w \in b\Omega} K(z, w) f(w). \quad (0.3.3)$$

还可证明 (Norguet[1]), O-F 形式 (0.3.2) 中的分子可写成

$$C_n \omega \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = \frac{1}{(2\pi i)^n} G \wedge (\bar{\partial} G)^{n-1},$$

这里 G 为 $(1, 0)$ 形式

$$G = \sum_{j=1}^n g_j(z, w) dw_j, \quad (0.3.4)$$

而 ∂ 是对 w 作用的, 指数 $n-1$ 表示 $n-1$ 次外乘积.

对于 \mathbb{C}^n 中超球 $z\bar{z}' < 1$, 选取 $g_i(z, w) = \bar{w}_i$, 于是当 $z \in \Omega$, $w \in b\Omega$ 时, 则

$$g = \sum_{i=1}^n (w_i - z_i) g_i = \sum_{i=1}^n (w_i - z_i) \bar{w}_i = 1 - z\bar{w}' \neq 0.$$

此时 $G = \sum \bar{w}_j dw_j = \partial\phi$, $\phi = |w|^2$.

于是 (0.3.2) 的分子成为

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \partial\phi \wedge (\bar{\partial}\partial\phi)^{n-1} = C d\sigma_w.$$

由于 $\int_{w\bar{w}'=1} \frac{C d\sigma_w}{(1-z\bar{w}')^n} = 1,$

可直接算出 $C = \omega_n^{-1}$.

也就是: 超球的 Cauchy-Fantappiè 核, 也是 (0.2.1). 一般来说, 对于一个域来讲, Cauchy-Szegö 核与 Cauchy-Fantappiè 核是不一致的, 但在超球的情形, 二者是一致的, 所以我们称 (0.2.1) 为超球的 Cauchy 核. 不但如此, 这样得到的 Cauchy 核的确满足本节中所要求的条件 (i) ~ (iv). 但一般来说, 如果域是任意取的, 或是 $g_i(z, w)$ 任意取定, 则这样得到的 Cauchy-Fantappiè 核来必满足所要求的条件 (i) ~ (iv), 尤其是条件 (iii) 中的: 对每个 $w \in b\Omega$, $H(z, w)$ 在 $z \in \bar{\Omega} - \{w\}$ 中解析这一条. 例如, Ω 为 \mathbb{C}^n 中的有界、光滑域, 取

$$g_i = \bar{w}_i - \bar{z}_i,$$

这样得到的 Cauchy-Fantappiè 核即为

$$K_{(2n-1)}(w, z) = \sigma \sum_{\alpha=1}^n (-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial w_\alpha} \frac{1}{[r(w-z)]^{2n-2}} \\ dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n \wedge \overline{dw}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{dw}_{\alpha-1} \wedge \cdots \wedge \overline{dw}_{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge \overline{dw}_n, \\ w \in \Omega, z \in d\Omega, \quad (0.3.5)$$

这里 $r(w-z)$ 表示 z 与 w 二点的欧氏距离.

(0.3.5) 即为 Bochner-Martinelli 核. 这个核虽然有简洁的形式, 再生性质等等, 但它不再是 z 的解析函数, 当 $z \in \bar{\Omega} - \{w\}$ 时.

问题是: 对于怎样的域, 我们可以找到满足本节中所要求的条件 (i) ~ (iv) 的 Cauchy-Fantappiè 核. Henkin (Хенкин) [1] 及 Ramirez [1], 之后 Kerzman 与 Stein [1] 在这方面作了重要的贡献, 他们对强拟凸域分别用 $\bar{\partial}$ 问题的解或层论, 给出了满足本节中所要求的条件 (i) ~ (iv) 的 Cauchy-Fantappiè 核, 现在通常称之为 Henkin-Ramirez 核以及 Stein-Kerzman 核.

§ 0.4 Henkin-Ramirez 核与 Stein-Kerzman 核

如上所述, 对于十分重要的强拟凸域, Henkin 及 Ramirez, 之后 Kerzman 与 Stein 分别应用 $\bar{\partial}$ 问题的解, 求解除法问题或是用层论等方法, 给出了满足上节中所要求的解析的 Cauchy-Fantappiè 核. 由于这些方法不可能在此作详细的介绍, 所以只能在这里介绍一个大概的想法, 有兴趣的读者可以阅读他们原来的著作.

先来介绍一下什么叫强拟凸域, 定义如下:

若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为一有界、光滑域. 这域由函数 λ 所定义: λ 为实值函数, 且在 $\bar{\Omega}$ 的一个邻域中属于 C^∞ . $\lambda(z) < 0$ 若 $z \in \Omega$; $\lambda(z) = 0$ 若 $z \in b\Omega$; $\lambda(z) > 0$ 若 $z \notin \bar{\Omega}$; $\text{grad} \lambda(z) \neq 0$ 若 $z \in b\Omega$, 以及

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) \eta_i \bar{\eta}_j \geq C |\eta|^2, \quad (0.4.1)$$

对任意的 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$ 都成立, 而 O 为一与 $z \in \bar{\Omega}$ 无关的正常数. Ω 称为强拟凸域.

条件 (0.4.1) 表示对于每个由 η 决定的复方向, λ 为次调和的.

现在来介绍 Henkin-Ramirez 核, 也就是来说明如何构造 $g_i(z, w)$ 即可.

对于 $w \in b\Omega$, $z \in \Omega$, z 靠近 w 时, 令

$$g_i(z, w) = \frac{\partial \lambda}{\partial w_i}(w) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w_i \partial w_j}(w) (z_j - w_j). \quad (0.4.2)$$

可以证明: 由这样定义的 $g_i(z, w)$, 使 (0.3.2) 的分母 $g(z, w)$ 不等于零.

对 λ 在 w 处展开到二阶:

$$\begin{aligned} \lambda(z) = & \lambda(w) + 2\operatorname{Re} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial w_i}(w) (z_i - w_i) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w_i \partial w_j}(w) (z_i - w_i) (z_j - w_j) \right] \\ & + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w_i \partial w_j}(w) (z_i - w_i) \overline{(z_j - w_j)} + \text{三阶项}. \end{aligned} \quad (0.4.3)$$

于是 $\lambda(z) = \lambda(w) - 2\operatorname{Re} g(z, w) + L(z, w)$,

这里 $L(z, w) \geqslant C|z - w|^2$, C 为常数 (由于 z 充分靠近 w , 故三阶项可以吸收到二阶项中去). 但是 $\lambda(z) < 0$, $\lambda(w) = 0$, 故有

$$\operatorname{Re} g(z, w) \geqslant C|z - w|^2.$$

因之 $g(z, w) \neq 0$. 显然 $g_i(z, w)$ 为 z 的解析函数, 我们这样得到的局部函数分别记作 $g_i^L(z, w)$ 及 $g^L(z, w)$.

对于局部函数 $g^L(z, w)$, 我们“扩展”到一个新的整体函数 $g(z, w)$ 上去. 这个 $g(z, w)$ 当 $z \in \bar{\Omega}$ 时, 为解析的, 当 $z \in \bar{\Omega} - \{w\}$ 时, $g(z, w) \neq 0$. “扩展”的意义为: 当 z 靠近 w 时,

$$g(z, w) = g^L(z, w) \phi(z, w),$$

这里 $\phi(z, w)$ 为局部定义的函数 (当 z 靠近 w 时), 且为 z 的解析函

数; 而且 $\phi(w, w) \neq 0$. 于是 $g(z, w)$ 与 $g^L(z, w)$ 当 z 靠近 w 时有相同的零点. 这样得到了 $g(z, w)$ 后, 我们可以用解除法问题

$$g(z, w) = \sum (w_i - z_i) g_i(z, w)$$

来求得 $g_i(z, w)$. 这样得到的 $g_i(z, w)$ 是 z 的解析函数.

这是 Henkin-Ramirez 核求得的大概情形.

至于 Stein-Kerzman 核, 其求得的大致过程如下:

直接将上面求得的 $g_i^L(z, w)$ “扩展”, 即当 z 靠近 w 时,

$$g_i(z, w) = g_i^L(z, w),$$

这样得到的 Cauchy-Fantappiè 形式记作 $E(z, w)$, 而这时 $E(z, w)$ 当 z 靠近 w 时, 是 z 的解析函数. 然后加上一个“修正”部分 $O(z, w)$, 使得 $H(z, w) = E(z, w) + O(z, w)$ 在整体是 z 的解析函数. 而

$$O(z, w) \in C^\infty(U(\bar{\Omega}) \times V(b\Omega)),$$

这里 $U(\bar{\Omega})$ 及 $V(b\Omega)$ 分别为 $\bar{\Omega}$ 及 $b\Omega$ 的邻域, 即在对角线上 (即 $w=z$) 时, $O(z, w)$ 仍为 C^∞ . $O(z, w)$ 由解 $\bar{\partial}$ 问题得到.

由于 $E(z, w)$ 可以明确地表达出来, 一切非构造性的东西全归到 $O(z, w)$ 中去, 而 $O(z, w)$ 是一个 C^∞ 的核, 所以在使用时有其方便之处.

第一章 超球的 Cauchy 型积分

§ 1.1 引言

本书从研究最简单、最基本的不可约域, \mathbb{C}^n 中的超球的 Cauchy 型积分开始.

在 § 0.2 及 § 0.3 中已经指出, 不论是从 Hilbert 空间的观点还是从外微分形式的观点来推广单复变数的 Cauchy 核, 当域为 \mathbb{C}^n 中的超球时, 两者是一致的. 它都为

$$\omega_{2n-1}^{-1}(1-z\bar{u}')^{-n}\dot{u},$$

这里 $u=(u_1, \dots, u_n)$, $z=(z_1, \dots, z_n)$, $u\bar{u}'=1$, $z\bar{z}'<1$, 而 ω_{2n-1} 为 $u\bar{u}'=1$ 的体积, 它等于 $\frac{2\pi^n}{\Gamma(n)}$, \dot{u} 为 $u\bar{u}'=1$ 上的体积元素.

有了 Cauchy 核就可以有 Cauchy 型积分. 若 $f(u)$ 为 $u\bar{u}'=1$ 上的可积函数, 则当 $z\bar{z}'<1$ 时, Cauchy 型积分

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n} \quad (1.1.1)$$

存在, 而当 $z\bar{z}'>1$ 时, Cauchy 型积分 (1.1.1) 就失去意义. 任取一点 $z=(\lambda, 0, \dots, 0)U$, $\lambda>1$, $U\bar{U}'=I$, I 表示单位方阵, 则

$$u=\left(\frac{1}{\lambda}, \sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}, 0, \dots, 0\right)U$$

时, $1-z\bar{u}'=0$. 所以 (1.1.1) 所定义的 Cauchy 型积分不存在.

当考虑 Cauchy 型积分趋于边界上的点 ξ 时, 其极限值可以用奇异积分的 Cauchy 主值来表示. 在定义 Cauchy 主值时, 如果取 ξ 的邻域为“圆”, 在 § 1.2~§ 1.5 中将证明, 这样的 Cauchy 主值是存在的, 且证明了相应的 Plemelj 公式. 如果取 ξ 的邻域为“椭圆”或是“长方形”, 在 § 1.6~§ 1.8 中将分别证明: 这些 Cauchy 主值是存在的, 且证明了相应的 Plemelj 公式. 有趣的是, 这时所得到的极限值可以用种种不同的 Cauchy 主值及 Plemelj 公式表达之. 这充分显示了多复变数与单复变数的本质的区别. “椭圆”的情形, 可以看作“圆”的情形的一种推广.

这一章的内容取自龚昇、孙继广[2], 龚昇、史济怀[4], 史济怀[1].

这一章的结果, 将在第六章中推广到强拟凸域上去. 并且可以看出, 这一章的结果对以后的几章都是起作用的.

§ 1.2 一条引理

为了研究超球的 Cauchy 型积分, 我们需要以下一条引理.

由于
$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-\overline{zu'})^n} = 1,$$

特别取 $z = (\rho, 0, \dots, 0)$, $0 \leq \rho < 1$, 于是

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n} = 1.$$

引理 1.2.1

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1| > \epsilon}} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n}$$

是存在的, 且等于 $\frac{1}{2}$.

证 已知有

$$1 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{\Sigma} + \int_{\sigma} \right) \frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n} = I_1 + I_2, \quad (1.2.1)$$

这里 $\Sigma: \begin{cases} u\bar{u}'=1, \\ |1-\bar{u}_1|\geqslant\varepsilon, \end{cases} \quad \sigma: \begin{cases} u\bar{u}'=1, \\ |1-\bar{u}_1|\leqslant\varepsilon. \end{cases}$

先来看 I_2 :

$$I_2 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma} \frac{u}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}. \quad (1.2.2)$$

令 $\bar{u}_1 = re^{i\theta}$, $u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$, 记 $v = (v_2, \dots, v_n)$, 于是 σ 为

$$\begin{cases} v\bar{v}' = 1 - r^2, \\ \cos\theta \geqslant \frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}. \end{cases}$$

这样,
$$I_2 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' \leqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2} v \int_{-a}^a \frac{d\theta}{(1-\rho r e^{i\theta})^n}$$

$$\left(a = \cos^{-1} \frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r} \right).$$

记
$$J = \int_{-a}^a \frac{d\theta}{(1-\rho r e^{i\theta})^n}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)} \int_{-a}^a (\rho r)^p e^{ip\theta} d\theta$$

$$= 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)} (\rho r)^p \frac{\sin pa}{p} + 2a$$

$$= 2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)} \frac{(\rho r e^{ia})^p}{p} \right\} + 2a.$$

由于
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)x^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)} = \frac{1}{(1-x)^n},$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)x^{p-1}}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)} &= \frac{1}{x(1-x)^n} - \frac{1}{x} = \frac{1-(1-x)^n}{x(1-x)^n} \\ &= \frac{1-y^n}{(1-y)y^n} = \frac{1+y+\dots+y^{n-1}}{y^n} \\ &= \frac{1}{y} + \dots + \frac{1}{y^n} \\ &= \frac{1}{(1-x)^n} + \dots + \frac{1}{1-x} \quad (y=1-x). \end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p)x^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)p} &= \int_0^x \frac{1-(1-x)^n}{x(1-x)^n} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)(1-x)^{n-1}} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{1-x} + \log \frac{1}{1-x} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} J &= 2\operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{(n-1)(1-\rho r e^{ia})^{n-1}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-\rho r e^{ia}} + \log \frac{1}{1-\rho r e^{ia}} \right\} + 2a, \\ I_2 &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu(1-\rho r e^{ia})^\nu} \right. \\ &\quad \left. + \log \frac{1}{1-\rho r e^{ia}} \right\} \dot{v} + \frac{2a}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \dot{v} \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{\nu(1-\rho r e^{ia})^\nu} \right. \\ &\quad \left. + \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \log \frac{1}{1-\rho r e^{ia}} \dot{v} \right\} \\ &\quad + \frac{2a}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \dot{v} \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} K_p + K_0 \right\} + \frac{2a}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \dot{v}, \quad (1.2.3) \end{aligned}$$

此处

$$\begin{aligned} K_p &= \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{p(1-\rho r e^{ia})^p}, \\ K_0 &= \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \log \frac{1}{1-\rho r e^{ia}} \dot{v}. \end{aligned}$$

先来看 I_2 表达式中的最后一项

$$\frac{2a}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \dot{v}$$

注意到 $\int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \dot{v}$ 是以 $\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}$ 为半径, 以原点为中心的 $2n-2$ 维球的体积, 由定义知

$$a = \cos^{-1} \left(\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r} \right).$$

由于 $\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r} \leq 1$, 所以 $(1-r)^2 \leq \varepsilon^2$, 以至当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\alpha = O(\varepsilon)$, 于是

$$\frac{2a}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' \leq 2\varepsilon - \varepsilon^2} \dot{v} = O(\varepsilon^{\frac{2n-2}{2}+1}) = O(\varepsilon^n).$$

再来考虑其它项. 由于 a 的定义,

$$\begin{aligned} re^{ia} &= \frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2} + ir \sqrt{1 - \left(\frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}\right)^2} \\ &= \frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{4r^2 - (1+r^2)^2 + 2\varepsilon^2(1+r^2) - \varepsilon^4} \\ &= \frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2} + \frac{i}{2} [2\varepsilon^2(1+r^2) - (1-r^2)^2 - \varepsilon^4]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2-v\bar{v}'-\varepsilon^2}{2} + \frac{i}{2} [2\varepsilon^2(2-v\bar{v}') - (v\bar{v}')^2 - \varepsilon^4]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

所以, 当 $p \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{p} \int_{v\bar{v}' \leq 2\varepsilon - \varepsilon^2} \left[1 - \rho \frac{2-v\bar{v}'-\varepsilon^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\rho}{2} (2\varepsilon^2(2-v\bar{v}') - (v\bar{v}')^2 - \varepsilon^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{-p} \dot{v} \\ &= \frac{1}{p} \int_{v\bar{v}' \leq 2\varepsilon - \varepsilon^2} \left[1 - \rho + \rho \frac{v\bar{v}'+\varepsilon^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\rho}{2} (2\varepsilon^2(2-v\bar{v}') - (v\bar{v}')^2 - \varepsilon^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{-p} \dot{v}. \end{aligned}$$

用球坐标, 则 K_p 等于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} \int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}} \left(1 - \rho + \rho \frac{\varepsilon^2+s^2}{2} - \frac{i\rho}{2} \sqrt{2\varepsilon^2(2-s^2) - s^4 - \varepsilon^4} \right)^{-p} \\ &\quad \cdot s^{2n-3} ds \int_0^\pi \sin^{2n-4} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin^2 \varphi_{2n-5} d\varphi_{2n-5} \\ &\quad \cdot \int_0^\pi \sin \varphi_{2n-4} d\varphi_{2n-4} \int_0^{2\pi} d\varphi_{2n-3} \\ &= \frac{2\pi^{n-1}}{p(n-2)!} \int_0^{\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}} \left[(1-\rho) + \rho \frac{\varepsilon^2+s^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\rho}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 - (s^2+\varepsilon^2)^2} \right]^{-p} s^{2n-3} ds. \end{aligned}$$

当 $\varepsilon > 0$ 固定时, 由 Lebesgue 定理,

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \int = \int \lim_{\rho \rightarrow 1},$$

于是

$$\begin{aligned} J_p &= \lim_{\rho \rightarrow 1} K_p = \lim_{\rho \rightarrow 1} \int_{|x| < 2\varepsilon - \varepsilon^2} p(1 - \rho r e^{i\alpha})^{-p} \bar{v} \\ &= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!p} \int_0^{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} \left[\frac{\varepsilon^2 + s^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 - (s^2 + \varepsilon^2)^2} \right]^{-p} s^{2n-3} ds. \end{aligned}$$

可以用 Lebesgue 定理的原因, 是这时被积函数的绝对值为

$$\begin{aligned} &\left[(1-\rho)^2 + 2\rho(1-\rho) \frac{s^2 + \varepsilon^2}{2} + \rho^2 \varepsilon^2 \right]^{-\frac{p}{2}} s^{2n-3} \\ &= \left[(1-\rho)^2 + \rho(1-\rho)s^2 + \rho\varepsilon^2 \right]^{-\frac{p}{2}} s^{2n-3} \\ &\leq \frac{2s^{2n-3}}{\varepsilon^p} \quad (\text{只要 } 1 \geq \rho \geq 2^{-\frac{2}{n-1}}). \end{aligned}$$

$$\text{由于 } |J_p| \leq \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!p} \int_0^{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{\varepsilon^p} = \frac{\pi^{n-1}(2-\varepsilon)^{n-1}\varepsilon^{n-p-1}}{(n-1)!p},$$

所以当 $p < n-1$ 时, $J_p = O(\varepsilon^{n-p-1})$; 而当 $p = n-1$ 时, 记

$$\eta = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}, \quad s = \eta R,$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } J_{n-1} &= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 \left[\frac{R^2 + \varepsilon^2 \eta^{-2}}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \sqrt{4\eta^{-4}\varepsilon^2 - (R^2 + \varepsilon^2 \eta^{-2})^2} \right]^{-n+1} R^{2n-3} dR. \end{aligned}$$

再应用 Lebesgue 定理, 得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{n-1} = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{(R^2 - i\sqrt{1-R^4})^{n-1}}.$$

令 $R^2 = t$, 上式即为

$$\begin{aligned} &\frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 \frac{t^{n-3} dt}{(t - i\sqrt{1-t^2})^{n-1}} \\ &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(n-1)\theta} \cos^{n-2}\theta \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} \theta \sin \theta e^{i(n-1)\theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(n-1)\theta} d\left(\frac{-\cos^{n-1}\theta}{n-1}\right) \\ &= \frac{-e^{i(n-1)\theta} \cos^{n-1}\theta}{n-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta \cdot e^{i(n-1)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{n-1} + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta \cdot e^{i(n-1)\theta} d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \operatorname{Im}(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{n-1}) &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta \cdot \cos(n-1)\theta d\theta \\ &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi^n}{(n-1)!2}, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} J_{n-1} = \frac{\pi^n}{(n-1)!2}. \quad (1.2.4)$$

我们还看到

$$\begin{aligned} K_0 &= \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \log \frac{1}{1 - \rho r \varepsilon^{ia}} \dot{v} \\ &= \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} -\log \left(1 - \rho + \rho \frac{v\bar{v}' + \varepsilon^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\rho}{2} \sqrt{2\varepsilon^2(2 - v\bar{v}') - (v\bar{v}')^2 - \varepsilon^4} \right) \dot{v}. \end{aligned}$$

用球坐标

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} -s^{2n-3} \log \left[\frac{\varepsilon^2 + s^2}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{2\varepsilon^2(2 - s^2) - s^4 - \varepsilon^4} \right] \\ &\quad \cdot ds \int_0^\pi \sin^{2n-4} \varphi_1 d\varphi_1 \cdots \int_0^{2\pi} d\varphi_{2n-3} \\ &= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} -s^{2n-3} \log \left[\frac{\varepsilon^2 + s^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \sqrt{2\varepsilon^2(2 - s^2) - s^4 - \varepsilon^4} \right] ds, \end{aligned}$$

记 $s = \eta R$,

$$\begin{aligned}
J_0 &= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!} \eta^{2n-2} \int_0^1 -R^{2n-3} \log \left[\eta^2 \left(\frac{R^2 + \varepsilon^2 \eta^{-2}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{i\eta^2}{2} \sqrt{4\eta^{-4}\varepsilon^2 - (R^2 + \varepsilon^2 \eta^{-2})^2} \right] dR \\
&= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!} \frac{2\eta^{2n-2} \ln \frac{\sqrt{2}}{\eta}}{2n-2} \\
&\quad + \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!} \eta^{2n-2} \int_0^1 -R^{2n-3} \log [R^2 + \varepsilon^2 \eta^{-2} \\
&\quad - i \sqrt{4\eta^{-4}\varepsilon^2 - (R^2 + \varepsilon^2 \eta^{-2})^2}] dR = o(1),
\end{aligned}$$

最后得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} J_2 = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \cdot \frac{\pi^n}{(n-1)!2} = \frac{1}{2}. \quad (1.2.5)$$

这样, 从

$$1 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_S \frac{\dot{u}}{(1 - \rho \bar{u}_1)^n} + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_\sigma \frac{\dot{u}}{(1 - \rho \bar{u}_1)^n}$$

得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1|>\varepsilon}} \frac{\dot{u}}{(1 - \rho \bar{u}_1)^n} = \frac{1}{2}. \quad (1.2.6)$$

今定义 Cauchy 主值

$$\begin{aligned}
&\text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1 - \bar{u}_1)^n} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1|>\varepsilon}} \frac{\dot{u}}{(1 - \bar{u}_1)^n},
\end{aligned} \quad (1.2.7)$$

于是有

$$\text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1 - \bar{u}_1)^n} = \frac{1}{2}. \quad (1.2.8)$$

§ 1.3 Cauchy 主值

设函数 $f(u)$ 定义在 $u\bar{u}'=1$ 上, 如果对于任意二点 u 及 v , $u\bar{u}'=1$, $v\bar{v}'=1$, 恒有

$$|f(u) - f(v)| = O([(u-v) \overline{(u-v)}]^{\frac{\alpha}{2}}) \\ = O((2 - u\bar{v}' - v\bar{u}')^{\frac{\alpha}{2}}),$$

则称 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\text{Lip } \alpha$, 此处 $0 < \alpha \leq 1$.

利用 § 1.2 的结果, 可以建立如下的

定理 1.3.1 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\text{Lip } \alpha$, 则 Cauchy 主值

$$\text{v. p. } \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u} \quad (v\bar{v}'=1)$$

是存在的, 并且等于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) - f(v)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u} + \frac{1}{2} f(v), \quad (1.3.1)$$

这里 Cauchy 主值的意义为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon}} \frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u}.$$

证 先取 $v = (1, 0, \dots, 0)$, 于是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1| > \varepsilon}} \frac{f(u)}{(1-u_1)^n} \dot{u} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1| > \varepsilon}} \frac{f(u) - f(1, 0, \dots, 0)}{(1-u_1)^n} \dot{u} \\ & \quad + \frac{f(1, 0, \dots, 0)}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1| > \varepsilon}} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n} = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

由于

$$|f(u) - f(1, 0, \dots, 0)| = O[(2 - u_1 - \bar{u}_1)^{\frac{\alpha}{2}}] = O(|1 - \bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}}),$$

因之

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1| > \varepsilon}} \frac{f(u) - f(1, 0, \dots, 0)}{(1-\bar{u}_1)^n} \dot{u} \right| \\ & \leq \frac{K}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1| > \varepsilon}} |1 - \bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}-n} \dot{u} \\ &= \frac{K}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 1} \oint_{|\theta| > \varepsilon} \frac{d\theta}{|1 - r\theta^{i\theta}|^{n-\frac{\alpha}{2}}}, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

此处令 $\bar{u}_1 = re^{i\theta}$, $u_2 = v_2$, \dots , $u_n = v_n$, $v = (v_2, \dots, v_n)$, K 为一正的常数,

$$a = \cos^{-1} \left(\frac{1+r^2-s^2}{2r} \right),$$

我们来考虑

$$\int_{|\theta| > a} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^{n-\frac{\alpha}{2}}}. \quad (1.3.4)$$

先设 $n=2$, 于是由 Hölder 不等式,

$$\int_{|\theta| > a} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^{2-\frac{\alpha}{2}}} \leq \left(\int_{|\theta| > a} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^2} \right)^{1-\frac{\alpha}{4}} \leq \left(\frac{2\pi}{1-r^2} \right)^{1-\frac{\alpha}{4}}.$$

因此当 $n=2$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1| > s}} |1-\bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}-n} \dot{u} &\leq \frac{2\pi}{\omega_2} \int_{v\bar{v}' < 1} \frac{\dot{v}}{(1-r^2)^{1-\frac{\alpha}{4}}} \\ &= \frac{2\pi}{\omega_2} \int_{v\bar{v}' < 1} \frac{\dot{v}}{(v\bar{v}')^{1-\frac{\alpha}{4}}}. \end{aligned}$$

用球坐标, 此为

$$O\left(\int_0^1 \frac{s ds}{s^{2-\frac{\alpha}{2}}}\right) = O(1),$$

所以我们得到, 当 $n=2$ 时,

$$\frac{1}{\omega_3} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1| > s}} |1-\bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}-2} \dot{u} = O(1). \quad (1.3.5)$$

当 $n > 2$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{|\theta| > a} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^{n-\frac{\alpha}{2}}} &\leq \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{(1-r)^{n-2-\frac{\alpha}{2}}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{2\pi}{(1-r)^{n-\frac{\alpha}{2}-1} (1+r)} = O\left(\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{n-\frac{\alpha}{2}-1}\right). \end{aligned}$$

所以, 用球坐标,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1|>\varepsilon}} |1-\bar{u}_1|^{\frac{\alpha}{2}-n} \dot{u} = O\left(\int_{|v\bar{v}'|<1} (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}-n+1} \dot{v}\right) \\ & = O\left(\int_0^1 s^{2n-3} \cdot s^{\alpha-2n+2} ds\right) = O\left(\int_0^1 s^{\alpha-1} ds\right) = O(1) \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

因而 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1$ 是一个通常积分, 根据 § 1.2 之结果,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-\bar{u}_1|>\varepsilon}} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n} = \frac{1}{2}.$$

所以在 (1.3.2) 中令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则当 $v = (1, 0, \dots, 0)$ 时证明了 (1.3.1).

对于一般的 v , $v\bar{v}'=1$, 一定存在酉方阵 U , 使 $vU = (1, 0, \dots, 0)$, 故得定理 1.3.1.

§ 1.4 Cauchy 型积分的极限值

记 $\rho(z, v) = ((z-v)(\overline{z-v})')^{\frac{1}{2}}$, $z\bar{z}' < 1$, $v\bar{v}'=1$. 并定义 $d(z, \mathcal{L}) = \min_{u \in \mathcal{L}} |1 - z\bar{u}'|$, \mathcal{L} 表示 $u\bar{u}'=1, z\bar{z}' < 1$. 先来证明如下的

定理 1.4.1 设 $f(u) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ (在 $u\bar{u}'=1$ 上), 令 z 从 $z\bar{z}' < 1$ 内趋于点 $v(v\bar{v}'=1)$, 只要

$$\frac{\rho(z, v)}{d(z, \mathcal{L})} < M, \quad (1.4.1)$$

M 为一常数, 则必有

$$\lim_{z \rightarrow v} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) - f(v)}{(1 - z\bar{u}')^n} \dot{u} = \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) - f(v)}{(1 - v\bar{u}')^n} \dot{u}. \quad (1.4.2)$$

证 首先有

$$\begin{aligned} I &= \int_{u\bar{u}'=1} \left(\frac{f(u) - f(v)}{(1 - z\bar{u}')^n} - \frac{f(u) - f(v)}{(1 - v\bar{u}')^n} \right) \dot{u} \\ &= \int_{u\bar{u}'=1} \frac{[(1 - v\bar{u}')^n - (1 - z\bar{u}')^n] (f(u) - f(v))}{(1 - z\bar{u}')^n (1 - v\bar{u}')^n} \dot{u} \\ &= \left(\int_{\sigma_\delta} + \int_{\mathcal{L}_\delta} \right) \frac{[(1 - v\bar{u}')^n - (1 - z\bar{u}')^n] (f(u) - f(v))}{(1 - z\bar{u}')^n (1 - v\bar{u}')^n} \dot{u} \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

此处 $\sigma_\delta: \begin{cases} u\bar{u}' = 1, \\ |1 - v\bar{u}'| < \delta, \end{cases} \quad \Sigma_\delta: \begin{cases} u\bar{u}' = 1, \\ |1 - v\bar{u}'| > \delta. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{但 } |I_1| &\leq \int_{\sigma_\delta} \frac{\left\{ |(v-z)\bar{u}'| (|1-v\bar{u}'|^{n-1} + |1-v\bar{u}'|^{n-2} \right. \\ &\quad \left. \cdot |1-z\bar{u}'| + \cdots + |1-z\bar{u}'|^{n-1}) \dot{u} \right\}}{|1-z\bar{u}'|^n |1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_\delta} \frac{\rho(z, v) \dot{u}}{|1-z\bar{u}'|^k |1-v\bar{u}'|^{n-(k-1)-\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

注意到 $|1-v\bar{u}'| \leq |1-z\bar{u}'| + |(z-v)\bar{u}'|$, 而

$$|(z-v)\bar{u}'| \leq [(z-v)\overline{(z-v)'}]^{1/2} < Md(z, \mathcal{L}) \leq M|1-z\bar{u}'|,$$

所以 $|1-v\bar{u}'| \leq (M+1)|1-z\bar{u}'|$, 即

$$|1-z\bar{u}'| \geq \frac{1}{M+1} |1-v\bar{u}'|.$$

再由于

$$\frac{\rho(z, v)}{|1-z\bar{u}'|} \leq \frac{\rho(z, v)}{d(z, \mathcal{L})} < M,$$

于是

$$|I_1| \leq \sum_{k=1}^n M(M+1)^k \int_{\sigma_\delta} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} = M_1 \int_{\sigma_\delta} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}, \quad (1.4.4)$$

其中

$$M_1 = \sum_{k=1}^n M(M+1)^k.$$

由下面的引理 1.4.1 知

$$\int_{\sigma_\delta} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} = O(\delta^{\frac{\alpha}{2}}) \quad (\delta \rightarrow 0), \quad (1.4.5)$$

所以, 对于任与的 $\varepsilon > 0$, 可取一 $\delta > 0$, 使在 σ_δ 上的积分 I_1 满足

$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. 在 δ 取定之后, 由于

$$\int_{\Sigma_\delta} \frac{f(u) - f(v)}{(1 - z\bar{u}')^n} \dot{u}$$

作为 z 的函数, 在 $z=v$ 连续, 故当 $\rho(z, v)$ 充分小时, 必有 $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

综上所述, 当 $\rho(z, v)$ 充分小时, 有 $|I| < \varepsilon$. 定理得证.

引理 1.4.1

$$\varphi(\delta) = \int_{\sigma_\delta} \frac{\dot{u}}{|1 - v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} = O(\delta^{\frac{\alpha}{2}}) \quad (\delta \rightarrow 0),$$

其中 $\sigma_\delta: \begin{cases} u\bar{u}' = 1, v\bar{v}' = 1, n \geq 2, 0 < \alpha \leq 1, \\ |1 - v\bar{u}'| \leq \delta, \end{cases}$

证 因为存在酉方阵 U , 使得 $v = (1, 0, \dots, 0)U$, 所以不妨假设

$$\varphi(\delta) = \int_{\substack{u\bar{u}' = 1 \\ |1 - \bar{u}_1| < \delta}} \frac{\dot{u}}{|1 - \bar{u}_1|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

记 $u_j = x_j + iy_j, j = 1, 2, \dots, n$, 并令

$$x_1 = \cos \theta_1, y_1 = \sin \theta_1 \cos \theta_2, x_2 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \dots,$$

$$y_n = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{2n-1},$$

其中 $0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{2n-2} < \pi, 0 \leq \theta_{2n-1} < 2\pi$, 则有

$$\dot{u} = \sin^{2n-2} \theta_1 \sin^{2n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{2n-2} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{2n-1},$$

$$|1 - \bar{u}_1|^2 = (1 - \cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2.$$

于是当 $\delta \rightarrow 0$ 时,

$$\varphi(\delta) = O\left(\iint_{\substack{0 \leq \theta_1, \theta_2 < \pi \\ (1 - \cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 < \delta^2}} \frac{\sin^{2n-2} \theta_1 \sin^{2n-3} \theta_2 d\theta_1 d\theta_2}{[(1 - \cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2]^{\frac{2n-\alpha}{4}}}\right). \quad (1.4.6)$$

注意到

$$\delta^2 \geq (1 - \cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \geq (1 - \cos \theta_1)^2 = 4 \sin^4 \frac{\theta_1}{2},$$

习知当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$, 所以 $\delta^2 \geq \frac{4}{\pi^4} \theta_1^4$, 即

$$\theta_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \delta^{\frac{1}{2}} < \pi \delta^{\frac{1}{2}}.$$

记 $(1 - \cos \theta_1)^2 = a, \sin^2 \theta_1 = b$, 并令 $\cos \theta_2 = t$, 则

$$\begin{aligned} \varphi(\delta) &= O\left(\int_0^{\pi \delta^{\frac{1}{2}}} d\theta_1 \int_0^1 \frac{b^{n-1} dt}{(a + bt^2)^{\frac{2n-\alpha}{4}}}\right) \\ &= O\left(\int_0^{\pi \delta^{\frac{1}{2}}} \frac{b^{\frac{n-1}{2}}}{a^{\frac{2n-\alpha}{4}}} d\theta_1 \int_0^1 \frac{dt}{\left(1 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} t\right)^2\right)^{\frac{2n-\alpha}{4}}}\right), \end{aligned}$$

令 $\sqrt{\frac{b}{a}} t = \operatorname{tg} \psi$, 便有

$$\begin{aligned}\varphi(\delta) &= O\left(\int_0^{\pi\delta^{\frac{1}{2}}} b^{n-1-\frac{1}{2}} a^{-\frac{2n-\alpha-2}{4}} d\theta_1 \int_0^{\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}} \cos^{\frac{2n-\alpha}{2}-2} \psi d\psi\right) \\ &= O\left(\int_0^{\pi\delta^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin^{2n-3} \theta_1 d\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^{\frac{2n-\alpha-2}{2}}}\right) \\ &= O\left(\int_0^{\pi\delta^{\frac{1}{2}}} \theta_1^{2n-3-(2n-\alpha-2)} d\theta_1\right) = O(\delta^{\alpha/2}).\end{aligned}$$

证毕.

进而我们可以得到本节之主要结果:

定理 1.4.2 (Plemelj 公式) 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\operatorname{Lip} \alpha$, 则当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 内部趋于 $v(v\bar{v}'=1)$ 时, 只要保持

$$\frac{\rho(z, v)}{d(z, \mathcal{L}')} < M \quad (M \text{ 为一常数}),$$

就有

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow v} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} \\ = \text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u} + \frac{1}{2} f(v).\end{aligned}\tag{1.4.7}$$

证 首先可以写 Cauchy 型积分为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} \\ = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)-f(v)}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} + \frac{f(v)}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n} \\ = I_1 + I_2.\end{aligned}\tag{1.4.8}$$

由定理 1.4.1 及定理 1.3.1, 有

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow v} I_1 &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)-f(v)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u} \\ &= \text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u} - \frac{1}{2} f(v).\end{aligned}\tag{1.4.9}$$

再注意到 $\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n} = 1,$

便可立得公式 (1.4.7).

§ 1.5 Cauchy 型积分的极限函数的连续性质

更深入一步, 我们有如下的

定理 1.5.1 若在 $u\bar{u}' = 1$ 上 $f(u) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, 则由 (1.4.7) 式所示的极限函数

$$F(v) = \lim_{s \rightarrow v} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) \dot{u}}{(1 - zu')^n}$$

必属于 $\text{Lip}(\alpha - \delta)$. 这里 $v\bar{v}' = 1$, δ 为小于 α 的任意正数.

为了证明这一定理, 我们首先证明

引理 1.5.1 设 $u = (u_1, \dots, u_n)$, 则

$$\psi(\varepsilon) = \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-u_1| \geq \varepsilon}} \frac{\dot{u}}{|1-u_1|^n} = O(\log \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.5.1)$$

证 如同引理 1.4.1 的证法, 对 $u\bar{u}' = 1$ 的点采用球坐标表示, 便有

$$\psi(\varepsilon) = O\left(\iint_{\substack{0 \leq \theta_1, \theta_2 < \pi \\ (1-\cos\theta_1)^2 + \sin^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \geq \varepsilon^2}} \frac{\sin^{2n-2}\theta_1 \sin^{2n-2}\theta_2 d\theta_1 d\theta_2}{[(1-\cos\theta_1)^2 + \sin^2\theta_1 \cos^2\theta_2]^{n/2}}\right). \quad (1.5.2)$$

因为当 $\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 < \pi$ 时, $(1-\cos\theta_1)^2 + \sin^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \geq 1$. 同时由于

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &\leq (1-\cos\theta_1)^2 + \sin^2\theta_1 \cos^2\theta_2 \\ &\leq (1-\cos\theta_1)^2 + \sin^2\theta_1 = 2(1-\cos\theta_1) \\ &= 4\sin^2\frac{\theta_1}{2} \leq \theta_1^2, \end{aligned}$$

所以若记 $(1-\cos\theta_1)^2 = a$, $\sin^2\theta_1 = b$, 并令 $\cos\theta_2 = t$, 则

$$\psi(\varepsilon) = O(1) + O\left(\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} b^{n-1} d\theta_1 \int_0^1 \frac{dt}{(a+bt^2)^{n/2}}\right).$$

令 $\sqrt{\frac{b}{a}}t = \text{tg } \phi$, 便有

$$\begin{aligned}
\psi(s) &= O(1) + O\left(\int_s^{\frac{\pi}{2}} b^{n-1-\frac{1}{2}} a^{-\frac{n-1}{2}} d\theta_1 \int_0^{\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}} \cos^{n-2}\phi d\phi\right) \\
&= O(1) + O\left(\int_s^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n-3}\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^{n-1}} d\theta_1\right) \\
&= O(1) + O\left(\int_s^{\frac{\pi}{2}} \theta_1^{-1} d\theta_1\right) = O(\log s), \quad s \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

引理得证.

现在来证明定理 1.5.1.

令

$$F_1(v) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}'=1} \frac{f(u) - f(v)}{(1 - v\bar{u}')^n} \dot{u}, \quad (1.5.3)$$

显然, 只需证明 $F_1(v)$ 在点 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ 属于 $\operatorname{Lip}(\alpha - \delta)$, 其中 δ 为小于 α 的任一正数. 也就是对于任一点 v , $v\bar{v}' = 1$, 必有

$$|F_1(v) - F_1(e_1)| \leq M\rho^\alpha \log \rho, \quad (1.5.4)$$

其中 M 为一绝对常数, $\rho = \rho(v, e_1) = ((v - e_1)(\overline{v - e_1})')^{\frac{1}{2}}$.

必须指出, 不妨设 $v = (v_1, v_*, 0, \dots, 0) = e_1 V$, 其中

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_* \\ -\bar{v}_* & \bar{v}_1 \end{pmatrix} \dot{+} I^{(n-2)}$$

为一酉方阵. 这是因为对于任一定点 $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v\bar{v}' = 1$, 必有酉方阵

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix},$$

使 $v = (v_1, v_*, 0, \dots, 0)U$, 所以可先作一变换 $u = \tilde{u}U$, 相应地有 $v = \tilde{v}U$, $e_1 = e_1U$, 其中 $\tilde{v} = (v_1, v_*, 0, \dots, 0) = e_1 V$, V 即如上所述.

由于

$$\begin{aligned}
F_1(v) - F_1(e_1) &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{w}'=1} \frac{f(w) - f(v)}{(1 - v\bar{w}')^n} \dot{w} \\
&\quad - \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) - f(e_1)}{(1 - e_1\bar{u}')^n} \dot{u}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(uV) - f(e_1V)}{(1 - e_1\bar{u}')^n} \dot{u} \\ - \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) - f(e_1)}{(1 - e_1\bar{u}')^n} \dot{u}.$$

于是

$$\begin{aligned} |F_1(v) - F_1(e_1)| &\leq \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left| \int_{\sigma} \frac{f(uV) - f(e_1V)}{(1 - e_1\bar{u}')^n} \dot{u} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left| \int_{\sigma} \frac{f(u) - f(e_1)}{(1 - e_1\bar{u}')^n} \dot{u} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left| \int_{\Sigma} \frac{f(uV) - f(u)}{(1 - e_1\bar{u}')^n} \dot{u} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left| \int_{\Sigma} \frac{f(e_1V) - f(e_1)}{(1 - e_1\bar{u}')^n} \dot{u} \right| \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

此处

$$\sigma: \begin{cases} u\bar{u}'=1, \\ |1 - e_1\bar{u}'| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad \Sigma: \begin{cases} u\bar{u}'=1, \\ |1 - e_1\bar{u}'| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon = \rho^2. \quad (1.5.6)$$

由引理 1.4.1, 可知

$$\begin{cases} J_1 \leq M_1 \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} = M_1 \rho^{\alpha}, \\ J_2 \leq M_1 \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} = M_1 \rho^{\alpha}. \end{cases} \quad (1.5.7)$$

由引理 1.5.1, 可知

$$J_4 \leq \frac{1}{\omega_{2n-1}} |f(e_1V) - f(e_1)| \int_{\Sigma} \frac{\dot{u}}{|1 - e_1\bar{u}'|^n} \leq M_2 \rho^{\alpha} \log \rho. \quad (1.5.8)$$

上面的 M_1, M_2 皆为绝对常数.

注意到

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma} \frac{|f(uV) - f(u)|}{|1 - e_1\bar{u}'|^n} \dot{u} \\ &\leq \frac{M_3}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma} \frac{((uV - u)(\overline{uV - u})')^{\frac{\alpha}{2}}}{|1 - e_1\bar{u}'|^n} \dot{u}, \end{aligned}$$

由于 $(uV - u)(\overline{uV - u})' = u(2I - V - \bar{V}')\bar{u}' \leq 2\operatorname{Re}(1 - v_1)$,

而 $\rho = \rho(v, e_1) = (e_1(V - I)(\bar{V}' - I)e_1')^{\frac{1}{2}} = (2\operatorname{Re}(1 - v_1))^{\frac{1}{2}}$,
所以

$$J_3 \leq \frac{M_3 \rho^\alpha}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma} \frac{\dot{w}}{|1 - e_1 \bar{w}'|^n} \leq M_4 \rho^\alpha \log \rho. \quad (1.5.9)$$

上面的 M_3, M_4 亦皆为绝对常数.

取 $M = \max\{M_1, M_2, M_4\}$, 便有 (1.5.4). 定理证毕.

此外还要证明一个在第二章中用得着的

定理 1.5.2 若 $\varphi(w, u)$ 为定义在 $w\bar{w}' = 1, u\bar{u}' = 1$ 上的连续函数, 作为 w 的函数及作为 u 的函数都满足 Lipschitz 条件, 那末

$$\Phi(v, u) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\varphi(w, u)}{(1 - v\bar{w}')^n} \dot{w}$$

作为 v 的函数及 u 的函数也都满足 Lipschitz 条件.

证 根据定理 1.5.1, 我们只需证明作为 u 的函数, $\Phi(v, u) = \psi(u)$ 是满足 Lipschitz 条件的. 若 $u_0\bar{u}_0' = 1$, 则

$$\begin{aligned} \psi(u) - \psi(u_0) &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\varphi(w, u) - \varphi(w, u_0)}{(1 - v\bar{w}')^n} \dot{w} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{array}{l} [\varphi(w, u) - \varphi(v, u)] \\ - [\varphi(w, u_0) - \varphi(v, u_0)] \end{array} \right\}}{(1 - v\bar{w}')^n} \\ &\quad + [\varphi(v, u) - \varphi(v, u_0)] \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{w}}{(1 - v\bar{w}')^n} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad \rho = \rho(u, u_0) = ((u - u_0)(\overline{u - u_0})')^{\frac{1}{2}},$$

据假设, $\varphi(w, u)$ 作为 u 的函数属于 $\operatorname{Lip} \alpha (0 < \alpha \leq 1)$, 那末显然有

$$I_2 = O(\rho^\alpha) \quad (\rho \rightarrow 0).$$

$$\text{命} \quad \Sigma: \begin{cases} w\bar{w}' = 1, \\ |1 - v\bar{w}'| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad \sigma: \begin{cases} w\bar{w}' = 1, \\ |1 - v\bar{w}'| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$$\text{则} \quad I_1 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{\sigma} + \int_{\Sigma} \right) = I_3 + I_4,$$

显然我们有 $I_3 = O\left(\int_{\sigma} \frac{\dot{w}}{|1 - v\bar{w}'|^n - \frac{\alpha}{2}}\right) = O(\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}), \varepsilon \rightarrow 0,$

$$\begin{aligned} \text{及} \quad I_4 &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma} \frac{\varphi(w, u) - \varphi(w, u_0)}{(1 - v\bar{w}')^n} \dot{w} \\ &\quad - (\varphi(v, u) - \varphi(v, u_0)) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma} \frac{\dot{w}}{(1 - v\bar{w}')^n} \\ &= I_5 + I_6. \end{aligned}$$

容易看出 $I_5 = O(\rho^{\alpha} \log \varepsilon),$

$$I_6 = O(\rho^{\alpha}).$$

取 $\varepsilon = \rho^2$, 则最后得到

$$\psi(u) - \psi(u_0) = O(((u - u_0)(\overline{u - u_0})')^{\frac{\alpha}{2}} \log(u - u_0)(\overline{u - u_0})'),$$

故对于任意小于 α 的正数 δ , 有

$$\psi(u) \in \text{Lip}(\alpha - \delta).$$

§1.6 定理 1.4.2 的推广

在这一节中, 将 §1.2~§1.5 中的结果进行推广. 前面我们定义 Cauchy 主值

$$\text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)}{(1 - v\bar{u}')^n} \dot{u} \quad (v\bar{v}'=1)$$

$$\text{为} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1 - v\bar{u}'| > \varepsilon}} \frac{f(u)}{(1 - v\bar{u}')^n} \dot{u}.$$

在这一节中我们推广 Cauchy 主值的定义, 命

$$\text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \frac{f(u)}{(1 - v\bar{u}')^n} \dot{u}$$

为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ \alpha^2(1 - \text{Re } v\bar{u}')^2 + \beta^2(\text{Im } v\bar{u}')^2 \geq \varepsilon^2}} \frac{f(u)}{(1 - v\bar{u}')^n} \dot{u} \quad (1.6.1)$$

而 $\gamma = \alpha/\beta, \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$

将要证明: 当 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\text{Lip } p$, 则这样定义的 Cauchy 主值是存在的, 且得到相应的 Plemelj 公式. 特别当 $\alpha=\beta$ 时, 就是 § 1.3~§ 1.6 中所讨论的.

我们要证明如下的

引理 1.6.1

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\beta+\alpha} \right)^{n-1}, \quad (1.6.2)$$

这里 $\sigma = \{u | u\bar{u}'=1, \alpha^2(1-\text{Re } \bar{u}_1)^2 + \beta^2(\text{Im } \bar{u}_1)^2 > \varepsilon^2\}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta \neq 0$.

定理 1.6.1 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\text{Lip } p$, 则 Cauchy 主值

$$\text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \frac{f(u)}{(1-\bar{v}u')^n} \dot{u} \quad (v\bar{v}'=1)$$

是存在的, 并且等于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)-f(v)}{(1-\bar{v}u')^n} \dot{u} + \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^{n-1} \right) f(v), \quad (1.6.3)$$

这里 Cauchy 主值由 (1.6.1) 所定义.

定理 1.6.2 (Plemelj 公式) 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\text{Lip } p$, 则当 z 从 $z\bar{z}'<1$ 内部趋于 $v(v\bar{v}'=1)$ 时, 只要保持

$$\frac{\rho(z, v)}{d(z, \mathcal{L})} < M \quad (M \text{ 为一常数}),$$

则有

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow v} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)}{(1-\bar{z}u')^n} \dot{u} \\ &= \text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \frac{f(u)}{(1-\bar{v}u')^n} \dot{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^{n-1} f(v), \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

这里 Cauchy 主值由 (1.6.1) 所定义.

从这里, 也显示出多复变数与单复变数的本质性的不同. 在单复变数时, Cauchy 主值的定义只有一种, Plemelj 公式也只有一个, 但在多复变数时, Cauchy 主值的定义不止一种, 而 Plemelj 公式也不只一个.

在这里特别值得注意的是 $\beta=0$ 的情形, 这时 Plemelj 公式成

为

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow v} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n} \\ = \text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\infty)} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}. \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

而 Cauchy 主值定义为

$$\begin{aligned} \text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\infty)} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ 1-\operatorname{Re} v\bar{u}' > \varepsilon}} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

也就是: Cauchy 型积分的极限值等于一种奇异积分的 Cauchy 主值. 当然这在单复变数时是不会发生的.

显然, 上述这些结果的关键在于证明引理 1.6.1. 有了引理 1.6.1, 可参照 § 1.3 的办法证明定理 1.6.1, 再由定理 1.6.1 及定理 1.4.1 可得定理 1.6.2. 所以我们在下一节中来证明引理 1.6.1, 而略去定理 1.6.1 及定理 1.6.2 的证明.

§ 1.7 引理 1.6.1 的证明

先考虑 $\alpha > 0, \beta > 0$ 的情形. 当 $\alpha = \beta$ 时, 在 § 1.2 中已经证明, 故只讨论 $\alpha \neq \beta$ 的情形.

取 $0 < \rho < 1$. 于是

$$1 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma} \frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n} + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma'} \frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n} = I + I'.$$

这里 $\sigma' = \{u \mid u\bar{u}' = 1, \alpha^2(1 - \operatorname{Re} \bar{u}_1)^2 + \beta^2(\operatorname{Im} \bar{u}_1)^2 \leq \varepsilon^2\}$.

先看 $I' = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma'} \frac{\dot{u}}{(1-\rho\bar{u}_1)^n}$. 命 $\bar{u}_1 = r e^{i\theta}$, $u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$,

$v = (v_2, \dots, v_n)$, $\alpha^2 = t$, $\beta^2 = 1 - t$ ($0 < t < 1$, 这样做总是可以的, 否

则除以 $\alpha^2 + \beta^2$, 而令 $\varepsilon'^2 = \varepsilon^2(\alpha^2 + \beta^2)^{-1}$). 由于 $\alpha \neq \beta$, 故 $t \neq \frac{1}{2}$, 于

是 σ' 的点可化为

$$t(1-r\cos\theta)^2 + (1-t)r^2\sin^2\theta \leq \varepsilon^2, \quad v\bar{v}' = 1-r^2.$$

由此可得

$$\cos\theta \geq \frac{t - [(1-t)(t+r^2(1-2t)) + (2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)}. \quad (1.7.1)$$

若命
$$a = \cos^{-1} \frac{t - [(1-t)(t+r^2(1-2t)) + (2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)},$$

则 $-a \leq \theta \leq a$. 由(1.7.1)得

$$1 \geq \frac{t - [(1-t)(t+r^2(1-2t)) + (2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)}.$$

由此不难算出 $1-r \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}$, 所以 $1-r^2 \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}$. 于是得到

$$I' = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} \dot{v} \int_{-a}^a \frac{d\theta}{(1-\rho r e^{i\theta})^n}.$$

如同 § 1.2 中(1.2.3)那样, I' 可写为

$$\frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} K_p + K_0 \right\} + \frac{2a}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} \dot{v}, \quad (1.7.2)$$

这里

$$K_p = \int_{v\bar{v}' \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} \frac{\dot{v}}{p(1-\rho r e^{i\theta})^p},$$

$$K_0 = \int_{v\bar{v}' \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} \log \frac{1}{1-\rho r e^{i\theta}} \dot{v}.$$

若记
$$x = \frac{t - [(1-t)(t+r^2(1-2t)) + (2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)},$$

则当 $r \rightarrow 1$ 时,

$$\begin{aligned} x-1 &= \frac{t - r(2t-1) - [(1-t)(t+r^2(1-2t)) + (2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{r(2t-1)} \\ &= O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

于是
$$a = \cos^{-1} x = \cos^{-1} 1 + O(x-1) = O(\varepsilon^2).$$

所以
$$\frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} a \dot{v} = O\left(\varepsilon^{\frac{2n-2}{2}+2}\right) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

再看(1.7.2)的其它项, 命

$$Q = [(1-t)(t+r^2(1-2t)) + (2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{则 } r \cos \alpha = \frac{t-Q}{2t-1}.$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \alpha &= 1 - \frac{t^2 - 2tQ + Q^2}{r^2(2t-1)^2} \\ &= \frac{r^2(2t-1)t - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt}{r^2(2t-1)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } r \sin \alpha = \frac{[r^2(2t-1)t - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|^2}.$$

于是当 $p \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{p} \int_{v\bar{v}' \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} \left[1 - \rho \frac{t-Q}{2t-1} \right. \\ &\quad \left. - i\rho \frac{[r^2(2t-1)t - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|} \right]^{-p} v. \end{aligned}$$

命 $v = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-2})$. 用球坐标,

$$x_1 = s \cos \varphi_1, x_2 = s \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots, x_{2n-2} = s \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-2}.$$

$$\text{于是 } v = s^{2n-3} \sin^{2n-4} \varphi_1 \sin^{2n-5} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-4} ds d\varphi_1 \cdots d\varphi_{2n-3}.$$

注意到 $r^2 = 1 - v\bar{v}'$, 这就得到

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{2\pi^{n-1}}{p\Gamma(n-1)} \int_0^{\left[\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}\right]^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \rho \frac{t-Q}{2t-1} \right. \\ &\quad \left. - i\rho \frac{[t(1-s^2)(2t-1) - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|} \right]^{-p} s^{2n-3} ds. \end{aligned}$$

被积函数的绝对值为

$$\begin{aligned} &\left[\left(1 - \rho \frac{t-Q}{2t-1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \rho^2 \frac{t(1-s^2)(2t-1) - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt}{(2t-1)^2} \right]^{\frac{-p}{2}} s^{2n-3}, \end{aligned}$$

当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 上式极限为

$$\frac{|2t-1|^p s^{2n-3}}{[(t+Q-1)^2 + t(1-s^2)(2t-1) - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt]^{p/2}}.$$

可以证明: 存在正数 η, δ ; 当 $s \in \left[0, \left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \varepsilon \in (0, \delta)$ 时, 有不等式

$$(t+Q-1)^2 + t(1-s^2)(2t-1) - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt > \eta_1 \varepsilon^2. \quad (1.7.3)$$

这是容易证明的. 经过计算, 上式左端即为

$$(2t-1)[2(t+Q-1) - (2t-1)s^2].$$

先设 $t > \frac{1}{2}$, 要证存在 $\eta_0 > 0$, 当 ε 充分小时有

$$2(t+Q-1) - (2t-1)s^2 > \eta_0 \varepsilon^2.$$

这只要取 $\eta_0 < 4(1-t)(2t-1)$ 即可.

当 $t < \frac{1}{2}$ 时, 要证存在 $\eta_0 > 0$, 当 ε 充分小时有

$$2(t+Q-1) - (2t-1)s^2 < \eta_0 \varepsilon^2.$$

这只要取 $\eta_0 < 2 \left[\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t} \right]^{-1}$ 即可.

故不论 $t > \frac{1}{2}$ 或 $t < \frac{1}{2}$, (1.7.3) 成立. 于是

$$J_p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} K_p = O(\varepsilon^{-p}) \int_0^{\left[\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}\right]^{\frac{1}{2}}} s^{2n-3} ds = O(\varepsilon^{n-p-1}).$$

故当 $p < n-1$ 时, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 1} K_p = 0$.

计算 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 1} K_{n-1} = J_{n-1}$, 由 Lebesgue 定理,

$$J_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}}} \left[\frac{t+Q-1}{2t-1} - i \frac{[t(2t-1)(1-s^2) - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|} \right]^{-n+1} \cdot s^{2n-3} ds.$$

记 $\eta = \left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, s = \eta R$, 则

$$J_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 \left[\frac{t+Q-1}{2t-1} - i \frac{[t(2t-1)(1-\eta^2 R^2) - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt]^{\frac{1}{2}}}{|2t-1|} \right]^{- (n-1)} \cdot \eta^{2n-2} R^{2n-2} dR.$$

由于

$$\begin{aligned} \eta^{-2} \frac{t-1+Q}{2t-1} &= \eta^{-2} \frac{t-1 + [(1-t)^2 + (2t-1)(1-t)\eta^2 R^2 + (2t-1)\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}{2t-1} \\ &= \frac{R^2}{2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

以及
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\eta^2(2t-1)} \{t(2t-1)(1-\eta^2 R^2) - t - (2t-1)\varepsilon^2 + 2Qt\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{t} \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon}{t}\right)^2} - \frac{R^4}{2} + O(\varepsilon) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} (1-R^4)^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

因此可得
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{n-1} = \frac{2^n \pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{R^{2n-2} dR}{\left[R^2 - i \left(\frac{t}{1-t}\right) \sqrt{1-R^4} \right]^{n-1}}.$$

命 $R^2 = u$, $\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} = b$, 则上式为

$$\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{u^{n-2} du}{(u - ib\sqrt{1-u^2})^{n-1}}.$$

命 $u = \cos \theta$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{n-1} &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-2} \theta \sin \theta d\theta}{(\cos \theta - ib \sin \theta)^{n-1}} \\ &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{i\Gamma(n)(1+b)^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2i\theta} + 1)^{n-2} (e^{2i\theta} - 1) d\theta}{\left(1 + \frac{1-b}{1+b} e^{2i\theta}\right)^{n-1}}, \end{aligned}$$

由于 $b > 0$, $-1 < \frac{1-b}{1+b} < 1$, 将被积函数展开, 然后积分得

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{n-1} &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \left\{ \frac{-1}{2(1+b)^{n-1}} \sum_{p=0}^{n-2} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q C_{n-2}^p C_{n+q-2}^q \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{1-b}{1+b} \right)^q \left[\frac{1}{p+q+1} ((-1)^{p+q+1} - 1) \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{p+q} ((-1)^{p+q} - 1) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i(1+b)^{n-1}} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{(1+b)^{n-1}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因之} \quad \operatorname{Im}(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{n-1}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\operatorname{Im} J_{n-1}) \\ &= \frac{\pi^n}{(n-1)!} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+b} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

最后计算 K_0 ,

$$\begin{aligned} K_0 &= \int_{v\bar{v}' \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} \log \frac{1}{1-\rho r e^{i\theta}} \dot{v}, \\ J_0 &= \lim_{\rho \rightarrow 1} K_0 = \int_{v\bar{v}' \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} \log \frac{1}{1-r e^{i\theta}} \dot{v} \\ &= \frac{-2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}}} s^{2n-3} \log(1-r e^{i\theta}) ds. \end{aligned}$$

由于 $\operatorname{Im} \log(1-r e^{i\theta}) = O(1)$, 故 $\operatorname{Im} J_0 = O(\varepsilon^{n-1})$. 综合上述, 得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} I' = \frac{2}{\omega_{n-1}} \frac{\pi^n}{(n-1)!} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+b} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+b} \right)^{n-1}.$$

由于 $b = \left(\frac{t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{\beta}$, 故当 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 时引理 1.6.1 得证.

当 $\alpha > 0$, $\beta = 0$ 时, 引理 1.6.1 成为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_1} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n} = 1, \quad (1.7.4)$$

这里 $\sigma_1 = \{u | u\bar{u}' = 1, \operatorname{Re}(1-\bar{u}_1) > \varepsilon\}$.

现在来证明 (1.7.4). 与证明 $\beta > 0$ 时情形一样, 取 $0 < \rho < 1$. 有

$$1 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_1} \frac{\dot{u}}{(1-\rho \bar{u}_1)^n} + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma'_1} \frac{\dot{u}}{(1-\rho \bar{u}_1)^n} = I_1 + I'_1,$$

这里 $\sigma'_1 = \{u | u\bar{u}' = 1, \operatorname{Re}(1-\bar{u}_1) \leq \varepsilon\}$.

类似于 (1.7.2), 我们有

$$I_1' = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=1}^{n-1} K_p + K_0 \right\} + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} a \dot{v},$$

这里
$$K_p = \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{p(1 - \rho r e^{i\alpha})^p},$$

$$K_0 = \int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \log \frac{1}{(1 - \rho r e^{i\alpha})} \dot{v},$$

而
$$\alpha = \cos^{-1} \frac{1 - \varepsilon}{r}.$$

如同上面 $\beta > 0$ 的情形的证明一样, 可证

$$\int_{v\bar{v}' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} a \dot{v} = o(1), \quad J_p = O(\varepsilon^{n-p-1}), \quad J_0 = o(1)$$

都成立, 唯一要算的是 J_{n-1} , 此时

$$J_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{(s - i\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2 - s^2})^{n-1}}.$$

记 $\eta = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}$, $s = \eta R$, 则

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \eta^{2n-2} \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{(\varepsilon - i\eta\sqrt{1-R^2})^{n-1}} \\ &= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon} \right)^{n-1} \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{\left(1 - i\frac{\eta}{\varepsilon} \sqrt{1-R^2} \right)^{n-1}}. \end{aligned}$$

被积函数分母的绝对值为

$$\left[1 + \frac{\eta^2}{\varepsilon^2} (1 - R^2) \right]^{\frac{n-1}{2}} = \left[1 + \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} (1 - R^2) \right]^{\frac{n-1}{2}} \geq 1,$$

且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 是趋于无穷的. 故由 Lebesgue 定理,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{n-1} = 0,$$

故 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1' = 0$. 所以引理 1.6.1 当 $\alpha > 0$, $\beta = 0$ 时也是成立的.

最后证明当 $\alpha = 0$, $\beta > 0$ 时引理 1.6.1 也成立. 这时引理 1.6.1 成为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1 - \bar{u}_1)^n} = 1 - 2^{n-2}, \quad (1.7.5)$$

这里 $\sigma_\varepsilon = \{u \mid u\bar{u}' = 1, |\operatorname{Im} \bar{u}_1| > \varepsilon\}$.

如同以前一样, 命 $\bar{u}_1 = r e^{i\theta}$, $u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$, 记 $v = (v_2, \dots, v_n)$. 于是 σ_2 为 $v\bar{v}' = 1 - r^2$, $|\sin \theta| > \frac{\varepsilon}{r}$. 记 $\alpha = \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{r}$, 则 θ 的变化范围是 $\alpha < \theta < \pi - \alpha$, $-(\pi - \alpha) < \theta < -\alpha$. 又因 $\frac{\varepsilon}{r} < |\sin \theta| \leq 1$, 所以 $v\bar{v}' \leq 1 - \varepsilon^2$. 故得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_2} \frac{\dot{u}}{(1 - \bar{u}_1)^n} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 1 - \varepsilon^2} \dot{v} \left\{ \int_{-\pi + \alpha}^{-\alpha} \frac{d\theta}{(1 - r e^{i\theta})^n} + \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} \frac{d\theta}{(1 - r e^{i\theta})^n} \right\}. \end{aligned}$$

与前面所做的一样可证

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_2} \frac{\dot{u}}{(1 - \bar{u}_1)^n} &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} J_k - \sum_{k=1}^{n-1} H_k + J_0 - H_0 \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 1 - \varepsilon^2} (\pi - 2\alpha) \dot{v}, \quad (1.7.6) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{v\bar{v}' < 1 - \varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{k(1 + r e^{-i\alpha})^k}, \quad J_0 = \int_{v\bar{v}' < 1 - \varepsilon^2} \ln \frac{1}{1 + r e^{-i\alpha}} \dot{v}, \\ H_k &= \int_{v\bar{v}' < 1 - \varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{k(1 - r e^{i\alpha})^k}, \quad H_0 = \int_{v\bar{v}' < 1 - \varepsilon^2} \ln \frac{1}{1 - r e^{i\alpha}} \dot{v}. \end{aligned}$$

先算(1.7.6)的最后一个积分. 命 $v = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-2})$, 用球坐标

$$\begin{aligned} x_1 &= s \cos \varphi_1, \quad x_2 = s \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad \dots, \\ x_{2n-2} &= s \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-3}, \\ \dot{v} &= s^{2n-3} \sin^{2n-4} \varphi_1 \sin^{2n-5} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-4} ds d\varphi_1 \cdots d\varphi_{2n-3}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{v\bar{v}' < 1 - \varepsilon^2} \alpha \dot{v} &= \int_{v\bar{v}' < 1 - \varepsilon^2} \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - v\bar{v}'}} \dot{v} \\ &= \int_0^{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} s^{2n-3} \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - s^2}} ds \\ &= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} (\sqrt{1 - \varepsilon^2})^{2n-2} \end{aligned}$$

$$\cdot \int_0^1 t^{2n-3} \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-(1-\varepsilon^2)t^2}} dt.$$

由于被积函数有界, 故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{v\bar{v}' < 1-\varepsilon^2} a \dot{v} = 0.$$

从而有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 1-\varepsilon^2} (\pi - 2\alpha) \dot{v} = 1.$$

再算

$$J_k = \frac{1}{k} \int_{v\bar{v}' < 1-\varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{(1 + re^{-i\alpha})^k},$$

由于

$$1 + re^{-i\alpha} = 1 + \sqrt{1 - v\bar{v}' - \varepsilon^2} - i\varepsilon,$$

用球坐标得 $J_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{(1 + \sqrt{1-s^2 - \varepsilon^2} - i\varepsilon)^k}.$

命 $\eta = \sqrt{1-\varepsilon^2}$, $s = \eta t$, 则

$$J_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \eta^{2n-2} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(1 + \eta\sqrt{1-t^2} - i\sqrt{1-\eta^2})^k}.$$

由 Lebesgue 定理,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_k = \lim_{\eta \rightarrow 1} J_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(1 + \sqrt{1-t^2})^k} = \text{实数},$$

所以

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} J_k = 0.$$

对 J_0 也用球坐标, 得

$$J_0 = -\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \eta^{2n-2} \int_0^1 t^{2n-3} \log(1 + \eta\sqrt{1-t^2} - i\sqrt{1-\eta^2}) dt,$$

$$\operatorname{Im} J_0 = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \eta^{2n-2} \int_0^1 t^{2n-3} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{1 + \eta\sqrt{1-t^2}} dt.$$

于是

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(J_0) = 0.$$

同样可证

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_0) = 0.$$

与计算 J_k 一样, H_k 可写成

$$H_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \eta^{2n-2} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(1 - \eta\sqrt{1-t^2} - i\sqrt{1-\eta^2})^k}.$$

被积函数的绝对值为

$$\frac{t^{2n-3}}{[(1-\eta\sqrt{1-t^2})^2 + (1-\eta^2)]^{k/2}} \leq \frac{t^{2n-3}}{(1-\sqrt{1-t^2})^k},$$

当 $k < n-1$ 时,

$$\int_0^1 \frac{t^{2n-3}}{(1-\sqrt{1-t^2})^k}$$

收敛, 极限可与积分交换,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(1-\sqrt{1-t^2})^k} = \text{实数},$$

所以, 当 $k < n-1$ 时, 有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im}(H_k) = 0.$$

最后计算 H_{n-1} .

$$H_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \eta^{2n-2} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} (1-\eta\sqrt{1-t^2} + i\sqrt{1-\eta^2})^{n-1}}{[(1-\eta\sqrt{1-t^2})^2 + (1-\eta^2)]^{n-1}} dt.$$

由于 $\text{Im}(1-\eta\sqrt{1-t^2} + i\sqrt{1-\eta^2})^{n-1}$

$$= \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (-1)^p C_{n-1}^{2p+1} (\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1} (1-\eta\sqrt{1-t^2})^{n-2p-2},$$

所以 $\text{Im}(H_{n-1}) = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \eta^{2n-2} \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (-1)^p C_{n-1}^{2p+1} K_p,$

其中 $K_p = (\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} (1-\eta\sqrt{1-t^2})^{n-2p-2} dt}{[(1-\eta\sqrt{1-t^2})^2 + (1-\eta^2)]^{n-1}}.$

作变换 $1-\eta\sqrt{1-t^2} = u,$

$$K_p = (\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1} \frac{1}{\eta^{2n-2}} \int_{1-\eta}^1 \frac{[\eta^2 - (1-u)^2]^{n-2}}{[u^2 + (1-\eta^2)]^{n-1}} \cdot u^{n-2p-2} (1-u) du,$$

但 $\frac{[\eta^2 - (1-u)^2]^{n-2}}{[u^2 + (1-\eta^2)]^{n-1}} = \frac{1}{u^2 + 1 - \eta^2} \left(\frac{2u}{u^2 + 1 - \eta^2} - 1 \right)^{n-2}$
 $= \sum_{q=0}^{n-2} (-1)^{n-q-2} C_{n-2}^q 2^q \frac{u^q}{(u^2 + 1 - \eta^2)^{q+1}}.$

于是 $K_p = \frac{1}{\eta^{2n-2}} \sum_{q=0}^{n-2} (-1)^{n-q-2} C_{n-2}^q 2^q (L_q - M_q),$

其中
$$L_q = (\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1} \int_{1-\eta}^1 \frac{u^{n+q-2p-2}}{(u^2+1-\eta^2)^{q+1}} du,$$

$$M_q = (\sqrt{1-\eta^2})^{2p+1} \int_{1-\eta}^1 \frac{u^{n+q-2p-1}}{(u^2+1-\eta^2)^{q+1}} du.$$

对 L_q 作变换 $u = \sqrt{1-\eta^2}x$, 有

$$L_q = (\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2} \left\{ \int_{\frac{1}{\sqrt{1+\eta}}}^1 \frac{x^{n+q-2p-2}}{(1+x^2)^{q+1}} dx + \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}} \frac{x^{n+q-2p-2}}{(1+x^2)^{q+1}} dx \right\} = Q_1 + Q_2.$$

由于 $0 \leq q \leq n-2$, $0 \leq 2p \leq n-2$, 所以 $n+q-2p-2 \geq 0$. 故有

$$Q_1 = O((\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2}), \quad (\eta \rightarrow 1).$$

故当 $0 \leq q < n-2$ 时, $\lim_{\eta \rightarrow 1} Q_1 = 0$ 对任意 $0 \leq p \leq \frac{n-2}{2}$ 成立.

$$Q_2 = (\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}} \frac{x^{n+q-2p-2}}{(1+x^2)^{q+1}} dx$$

$$\leq (\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}} x^{n-q-4} dx.$$

当 $0 \leq q < n-3$ 时,

$$Q_2 \leq \frac{1}{n-q-3} [\sqrt{1-\eta^2} - (\sqrt{1-\eta^2})^{n-q-2}] \rightarrow 0, \quad (\eta \rightarrow 1).$$

当 $q = n-3$ 时,

$$Q_2 \leq \sqrt{1-\eta^2} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}} \frac{dx}{x} = \sqrt{1-\eta^2} \log \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \rightarrow 0, \quad (\eta \rightarrow 1).$$

综上所述, 当 $0 \leq q < n-2$ 时, $\lim_{\eta \rightarrow 1} L_q = 0$. 用同样方法可以证明, 当

$0 \leq q \leq n-2$ 时, $\lim_{\eta \rightarrow 1} M_q = 0$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 1} K_p &= 2^{n-1} \lim_{\eta \rightarrow 1} L_{n-2} = 2^{n-2} \int_0^\infty \frac{x^{2n-2p-4}}{(1+x^2)^{n-1}} dx \\ &= 2^{n-3} \int_0^\infty \frac{t^{n-p-\frac{5}{2}}}{(1+t)^{n-1}} dt = 2^{n-3} B\left(n-p-\frac{3}{2}, p+\frac{1}{2}\right) \\ &= \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n-p-\frac{3}{2}\right) 2^{n-3} / \Gamma(n-1). \end{aligned}$$

这就得到 $\lim_{n \rightarrow 1} \text{Im}(H_{n-1})$

$$= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (-1)^p C_{n-1}^{2p+1} 2^{n-3} \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-p-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n-1)}.$$

但是

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (-1)^p C_{n-1}^{2p+1} B\left(n-p-\frac{3}{2}, p+\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (-1)^p C_n^{2p+1} \int_0^\infty \frac{t^{n-p-\frac{5}{2}}}{(1+t)^{n-1}} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{n-3}}{(1+t)^{n-1}} \left\{ \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} (-1)^p C_n^{2p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{2p+1} \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{n-2}}{(1+t)^{n-1}} \left\{ \text{Im} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{t}}\right)^{n-1} \right\} dt \\ &= \text{Im} \left(\int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}} dt}{(\sqrt{t}-i)^n} \right) \\ &= 2\text{Im} \left(\int_0^\infty \frac{x^{n-2} dx}{(x-i)^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

用分部积分法, 可得

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{n-1} dx}{(x-i)^n} = \pi i,$$

$$\begin{aligned} \text{但} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^{n-1} dx}{(x-i)^n} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{x^{n-1}}{(x-i)^n} - \frac{x^{n-1}}{(x+i)^n} \right\} dx \\ &= 2i \text{Im} \left(\int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{(x-i)^n} \right). \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad 2\text{Im} \left(\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(x-i)^n} dx \right) = \pi.$$

$$\text{因之} \quad \lim_{n \rightarrow 1} \text{Im}(H_{n-1}) = \frac{2^{n-2}\pi^n}{\Gamma(n)}.$$

综合以上所述, 就得到(1.7.5).

因之, 引理 1.6.1 不论当 $\alpha > 0, \beta > 0; \alpha > 0, \beta = 0$ 或 $\alpha = 0, \beta > 0$ 时都成立.

§ 1.8 另一种 Cauchy 主值

在 § 1.6 中我们推广了 Cauchy 主值的定义, 命

$$\text{v. p. } \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u}$$

为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ \alpha^2(1-\operatorname{Re} v\bar{u}')^2 + \beta^2(\operatorname{Im} v\bar{u}')^2 \geq \varepsilon^2}} \frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u},$$

而 $\gamma = \alpha/\beta$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

并且证明: 当 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\operatorname{Lip} p$ 时, 则这样定义的 Cauchy 主值是存在的, 且得到相应的 Plemelj 公式.

在本节中, 我们将给出另一种 Cauchy 主值的定义.

若 $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$D(v, \varepsilon) = \{u | u\bar{u}'=1, 1-\operatorname{Re} v\bar{u}' < \alpha\varepsilon, |\operatorname{Im} v\bar{u}'| < \beta\varepsilon\}, \quad (1.8.1)$$

而 $D^*(v, \varepsilon)$ 为 $D(v, \varepsilon)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上的余集,

$$B = \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt \right\}. \quad (1.8.2)$$

我们要证明如下的

引理 1.8.1

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{D^*(v, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1-u_1)^n} = 1 - B, \quad (1.8.3)$$

这里 $D^*(v, \varepsilon)$, B 由 (1.8.1) 及 (1.8.2) 所定义.

定理 1.8.1 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\operatorname{Lip} p$, 则 Cauchy 主值

$$\text{v. p. } \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(B)} \frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u} \quad (v\bar{v}'=1)$$

是存在的, 并且等于

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) - f(v)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u} + (1-B)f(v).$$

这里 Cauchy 主值定义为

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{D^*(v, s)} \frac{f(u)}{(1 - v\bar{u}')^n} \bar{u}' \quad (1.8.4)$$

定理 1.8.2 (Plemelj 公式) 若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lip p ($0 < p \leq 1$), 则当 z 从 $z\bar{z}' < 1$ 内部趋于 v ($v\bar{v}'=1$) 时, 只要保持

$$\frac{\rho(z, v)}{d(z, \mathcal{L})} < M \quad (M \text{ 为一常数}),$$

则有

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow v} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)}{(1 - z\bar{u}')^n} \bar{u}' \\ = \text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(B)} \frac{f(u)\bar{u}'}{(1 - v\bar{u}')^n} + Bf(v). \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

这里 Cauchy 主值由 (1.8.3) 所定义.

特别当 $\beta = \infty$ 时, $B=0$, 这时 (1.8.5) 就成为 (1.6.5). 而 Cauchy 主值 (1.8.3) 的定义也与 (1.6.6) 一致.

同样, 上述这些结果的关键在于证明引理 1.8.1. 有了引理 1.8.1, 可参照 § 1.3 的办法证明定理 1.8.1. 再由定理 1.8.1 及定理 1.4.1 可得定理 1.8.2, 所以我们在下一节中来证明引理 1.8.1 而略去定理 1.8.1 及定理 1.8.2 的证明.

§ 1.9 引理 1.8.1 的证明

要证 (1.8.3), 即要证明

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{D(v, s)} \frac{\bar{u}'}{(1 - u_1)^n} = B \quad (1.9.1)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } D(v, s) = \{u | u\bar{u}'=1, 1 - \operatorname{Re} v\bar{u}' < \alpha s\} \\ + \{u | u\bar{u}'=1, |\operatorname{Im} v\bar{u}'| < \beta s\} - \{u | u\bar{u}'=1\} \\ + \{u | u\bar{u}'=1, 1 - \operatorname{Re} v\bar{u}' > \alpha s, |\operatorname{Im} v\bar{u}'| > \beta s\}. \end{aligned}$$

由 § 1.7, 已知

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ 1 - \operatorname{Re} u_1 < \alpha s}} \frac{\bar{u}'}{(1 - u_1)^n} = 0, \quad (1.9.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |\operatorname{Im} u_1| < \beta\varepsilon}} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n} = 2^{n-2}, \quad (1.9.3)$$

所以要证的是

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ 1-\operatorname{Re} u_1 > \alpha\varepsilon, |\operatorname{Im} u_1| > \beta\varepsilon}} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n} \\ &= 1 - \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_0^{\arctan \frac{\beta}{\alpha}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt. \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

当 $\beta=0$ 时, (1.9.4) 即为 (1.9.2). 当 $\alpha=0$ 时, 可以证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt = \frac{\pi}{2} \quad (\text{见第六章 § 6.5}),$$

此即 (1.9.3), 所以只要证明 $\alpha>0, \beta>0$ 的情形, (1.9.4) 成立.

如以前那样, 令 $\bar{u}_1 = r e^{i\theta}$, $(u_2, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_{n-1})$, 于是当 $u\bar{u}'=1, 1-\operatorname{Re} u_1 > \alpha\varepsilon, |\operatorname{Im} u_1| > \beta\varepsilon$ 时, v, θ 的变化范围为

$$v\bar{v}' < 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2, \quad -(\pi-b) < \theta < -a, \quad a < \theta < \pi-b;$$

$$2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2 \leq v\bar{v}' < 1 - \beta^2\varepsilon^2,$$

$$-(\pi-b) < \theta < -b, \quad b < \theta < \pi-b,$$

这里

$$a = \cos^{-1} \frac{1-\alpha\varepsilon}{r}, \quad b = \sin^{-1} \frac{\beta\varepsilon}{r}.$$

因之,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ 1-\operatorname{Re} u_1 > \alpha\varepsilon, |\operatorname{Im} u_1| > \beta\varepsilon}} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_1)^n} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} \dot{v} \left(\int_{-(\pi-b)}^{-a} + \int_a^{\pi-b} \right) \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^n} \\ &+ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2 \leq v\bar{v}' < 1 - \beta^2\varepsilon^2} \dot{v} \left(\int_{-(\pi-b)}^{-b} + \int_b^{\pi-b} \right) \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^n} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_{-(\pi-b)}^{-a} \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^n} + \int_a^{\pi-b} \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^n} \\ &= 2\operatorname{Im}(B_1 - B_2) + 2(\pi - a - b), \end{aligned}$$

而

$$B_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(1+r e^{-i\theta})^k} - \log(1+r e^{-i\theta}),$$

$$B_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(1-r\theta^{ia})^k} - \log(1-r\theta^{ia}).$$

于是 I_1 等于

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \int_{v\bar{v}' \leq 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} (B_1 - B_2) \dot{v} \\ & + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' \leq 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} (\pi - a - b) \dot{v} \\ & = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} J_k - J_0 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} K_k - K_0 \right) \right] \\ & + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' \leq 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} (\pi - a - b) \dot{v}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{v\bar{v}' \leq 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} \log(1+r\theta^{-ib}) \dot{v}, \\ J_k &= \frac{1}{k} \int_{v\bar{v}' \leq 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{(1+r\theta^{-ib})^k}, \quad k=1, \dots, n-1, \\ K_0 &= \int_{v\bar{v}' \leq 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} \log(1-r\theta^{ia}) \dot{v}, \\ K_k &= \frac{1}{k} \int_{v\bar{v}' \leq 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{(1-r\theta^{ia})^k}, \quad k=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

先算 J_k . 由于 $1+r\theta^{-ib} = 1 + \sqrt{r^2 - \beta^2\varepsilon^2} - i\beta\varepsilon$, 用球坐标, 得出

$$J_k = \frac{1}{k} \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{(1 + \sqrt{r^2 - \beta^2\varepsilon^2} - i\beta\varepsilon)^k}.$$

由于被积函数不超过 s^{2n-3} , 故有 $J_k = O(\varepsilon^{n-1})$. 而

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{v\bar{v}' \leq 2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2} \log(1+r\theta^{-ib}) \dot{v} \\ &= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2}} s^{2n-3} \log(1 + \sqrt{r^2 - \beta^2\varepsilon^2} - i\beta\varepsilon) ds, \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Im} J_0 = O(\varepsilon^{n-1}).$$

再算 K_k 和 K_0 , 由于

$$1 - r\theta^{ia} = \alpha\varepsilon - i\sqrt{r^2 - (1 - \alpha\varepsilon)^2},$$

故 $\operatorname{Im} K_0 = O(\varepsilon^{n-1})$.

$$K_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{[\alpha\varepsilon - i\sqrt{1-s^2} - (1-\alpha\varepsilon)^2]^k}.$$

由于

$$\left| \frac{s^{2n-3}}{(\alpha\varepsilon - i\sqrt{1-s^2} - (1-\alpha\varepsilon)^2)^k} \right| \leq \frac{(\sqrt{2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2})^{2n-3}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{k}{2}} \varepsilon^k},$$

故 $K_k = O(\varepsilon^{n-k-1})$, 而

$$K_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^{\sqrt{2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{[\alpha\varepsilon - i\sqrt{1-s^2} - (1-\alpha\varepsilon)^2]^{n-1}}.$$

记 $\eta = \sqrt{2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2}$, $s = \eta R$, 则

$$\begin{aligned} K_{n-1} &= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \eta^{2n-2} \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{[\alpha\varepsilon - i\sqrt{1-\eta^2 R^2} - (1-\alpha\varepsilon)^2]^{n-1}} \\ &= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{\eta^2}{\alpha\varepsilon} \right)^{n-1} \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{\left[1 - \frac{i}{\alpha\varepsilon} \sqrt{1-\eta^2 R^2} - (1-\alpha\varepsilon)^2 \right]^{n-1}}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sqrt{1-\eta^2 R^2} - (1-\alpha\varepsilon)^2 &= \left[\frac{1}{\alpha\varepsilon} (1-R^2) (2-\alpha\varepsilon) + \frac{\beta^2 R^2}{\alpha^3} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= O\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned}$$

故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{n-1} = 0.$$

同法可证

$$\int_{\eta^2 \leq \nu\bar{\nu}' \leq 1-\beta^2\varepsilon^2} (\pi - a - b) \dot{\nu} = o(1).$$

综合上述得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = 0.$$

再算 I_2 ,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\eta^2 \leq \nu\bar{\nu}' \leq 1-\beta^2\varepsilon^2} \dot{\nu} \left(\int_{-(\alpha-b)}^{-b} + \int_b^{\alpha-b} \right) \frac{d\theta}{(1-r\theta^{1\theta})^n} \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-1} P_k - P_0 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} Q_k - Q_0 \right) \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\eta^2 \leq \nu\bar{\nu}' \leq 1-\beta^2\varepsilon^2} (\pi - 2b) \dot{\nu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } P_0 &= \int_{\eta^2 < v\bar{v}' < 1-\beta^2\varepsilon^2} \ln(1+r e^{-ib}) \dot{v}, \\
 P_k &= \frac{1}{k} \int_{\eta^2 < v\bar{v}' < 1-\beta^2\varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{(1+r e^{-ib})^k}, \quad k=1, 2, \dots, n-1, \\
 Q_0 &= \int_{\eta^2 < v\bar{v}' < 1-\beta^2\varepsilon^2} \ln(1-r e^{ib}) \dot{v}, \\
 Q_k &= \frac{1}{k} \int_{\eta^2 < v\bar{v}' < 1-\beta^2\varepsilon^2} \frac{\dot{v}}{(1-r e^{ib})^k}, \quad k=1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

$$\text{易证} \quad \int_{\eta^2 < v\bar{v}' < 1-\beta^2\varepsilon^2} b \dot{v} = o(1),$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\eta^2 < v\bar{v}' < 1-\beta^2\varepsilon^2} \pi \dot{v} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \pi [(\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2})^{2n-2} - \eta^{2n-2}] \\
 &= \frac{\pi^n}{\Gamma(n)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\eta^2 < v\bar{v}' < 1-\beta^2\varepsilon^2} (\pi - 2b) \dot{v} = 1.$$

$$\begin{aligned}
 \text{由于 } P_k &= \frac{1}{k} \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_{\eta}^{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{(1 + \sqrt{r^2 - \beta^2\varepsilon^2} - i\beta\varepsilon)^k} \\
 &= \frac{1}{k} \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{(1 + \sqrt{1-s^2 - \beta^2\varepsilon^2} - i\beta\varepsilon)^k} \\
 &\quad + o(1).
 \end{aligned}$$

命 $\gamma = \sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}$, $s = \gamma R$, 则

$$P_k = \frac{1}{k} \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 \frac{\gamma^{2n-2} R^{2n-3} dR}{(1 - \gamma\sqrt{1-R^2} - i\beta\varepsilon)^k}.$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, P_k 趋于一实数, 故 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} P_k = 0 (1 \leq k \leq n-1)$. 同样

可证

$$\operatorname{Im} P_0 = \operatorname{Im} Q_0 = o(1).$$

再算 Q_k . 由于

$$1 - r e^{ib} = 1 - \sqrt{r^2 - \beta^2\varepsilon^2} - i\beta\varepsilon,$$

$$\text{故} \quad Q_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \int_{\eta}^{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{(1 - \sqrt{1-s^2 - \beta^2\varepsilon^2} - i\beta\varepsilon)^k}.$$

$$\text{而} \quad \int_0^{\eta} \frac{s^{2n-3} ds}{(1 - \sqrt{1-s^2 - \beta^2\varepsilon^2} - i\beta\varepsilon)^k} = O(\varepsilon^{n-k-1}),$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{\sqrt{1-\beta^2\varepsilon^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{(1-\sqrt{1-s^2}-\beta^2\varepsilon^2-i\beta\varepsilon)^k} \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{\gamma^{2n-3} R^{2n-3} dR}{(1-\gamma\sqrt{1-R^2}-i\beta\varepsilon)^k} \right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{(1-\sqrt{1-R^2})^k}.
\end{aligned}$$

右端被积函数在 $R=0$ 处的阶是 $R^{-(2k-2n+3)}$, 当 $k < n-1$ 时,

$$2k-2n+3 < 1,$$

故右端收敛, 因之

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_k = \text{实数},$$

这就得出 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} Q_k = 0 \quad (k < n-1)$.

$$\begin{aligned}
\text{最后计算 } Q_{n-1} &= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_{\eta}^{\gamma} \frac{s^{2n-3} ds}{(1-\sqrt{\gamma^2-s^2}-i\beta\varepsilon)^{n-1}} \\
&= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \left(\int_0^{\gamma} - \int_0^{\eta} \right) \frac{s^{2n-3} ds}{(1-\sqrt{\gamma^2-s^2}-i\beta\varepsilon)^{n-1}} \\
&= T_1 - T_2.
\end{aligned}$$

对 T_1 作变换 $s = \gamma R$, 则 T_1 等于

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{\gamma^{2n-2} R^{2n-3} dR}{(1-\gamma\sqrt{1-R^2}-i\sqrt{1-\gamma^2})^{n-1}}.$$

$$\text{故 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} T_1 = \frac{2^{n-2}\pi^n}{\Gamma(n)}.$$

对 T_2 作变换 $s = \eta R$, 则 T_2 等于

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{\eta^{2n-2} R^{2n-3} dR}{(1-\sqrt{\gamma^2-\eta^2 R^2}-i\beta\varepsilon)^{n-1}}.$$

由于 $(\gamma^2 - \eta^2 R^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - \beta^2 \varepsilon^2 - \eta^2 R^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \alpha R^2 \varepsilon + O(\varepsilon^2)$,

所以 $(1 - \sqrt{\gamma^2 - \eta^2 R^2} - i\beta\varepsilon)^{n-1} = (\alpha R^2 - i\beta)^{n-1} \varepsilon^{n-1} + O(\varepsilon^n)$.

而 $\eta^{2n-2} R^{2n-3} = (2\alpha\varepsilon - (\alpha^2 + \beta^2)\varepsilon^2)^{n-1} R^{2n-3}$,

$$\text{故 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_2 = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{(2\alpha)^{n-1}}{(\alpha R^2 - i\beta)^{n-1}} R^{2n-3} dR.$$

命 $c = \beta/\alpha$, 则上述积分为

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} 2^{n-1} \int_0^1 \frac{R^{2n-3} dR}{(R^2 - ic)^{n-1}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{u^{n-2} du}{(u - ic)^{n-1}}.$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u^{n-2} du}{(u - ic)^{n-1}} &= \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k (ci)^k \int_0^1 \frac{du}{(u - ic)^{k+1}} \\ &= \log \frac{1-ic}{-ic} + \sum_{k=1}^{n-2} C_{n-2}^k (ci)^k \frac{1}{k} \left(\frac{1}{(1-ic)^k} - \frac{1}{(-ic)^k} \right). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\int_0^1 \frac{u^{n-2} du}{(u - ic)^{n-1}} \right) &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{c} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{C_{n-2}^k}{k} \operatorname{Im} \left(\frac{ic}{1-ic} \right)^k \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha}{\beta} - \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{k+1} \cdot \frac{C_{n-2}^k}{k} \\ &\quad \cdot \frac{\beta^k}{(\alpha^2 + \beta^2)^k} \sin k \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha}{\beta} \right). \end{aligned}$$

于是得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} Q_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \left(2^{n-3} \pi - 2^{n-2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha}{\beta} + 2^{n-2} h_n \right),$$

$$\text{而 } h_n = \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{k+1} \frac{C_{n-2}^k}{k} \cdot \frac{\beta^k}{(\alpha^2 + \beta^2)^{k/2}} \sin k \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

综合上述得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = 1 - 2^{n-3} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{2}{\pi} h_n \right);$$

而(证明见第六章 § 6.5)

$$2^{n-3} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{2}{\pi} h_n \right) = \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_0^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{\alpha}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt.$$

因之, (1.9.4) 成立.

§ 1.10 K-极限

在定理 1.4.1, 定理 1.4.2, 定理 1.6.2, 定理 1.8.2 中, 我们都假定 z 在满足条件(1.4.1): $\frac{\rho(z, v)}{d(z, \mathcal{L})} < M$ 之下趋于球而上的点 v , 这里 $\rho(z, v) = [(z-v)(\overline{z-v})']^{\frac{1}{2}}$, $d(z, \mathcal{L}) = \min_{u\bar{u}'=1} |1 - z\bar{u}'|$, M 是一个正的常数. 如果记

$$H_M(v) = \{z | z\bar{z}' < 1, [(z-v)(\overline{z-v})']^{\frac{1}{2}} < M \min_{u\bar{u}'=1} |1-z\bar{u}'|\},$$

那末, 定理 1.4.1, 1.4.2, 1.6.2, 1.8.2 中的极限都可写作 $\lim_{\substack{z \rightarrow v \\ z \in H_M(v)}}$.

不妨称这种极限为 H 极限.

Korányi 在文章 [1] 中引进了另一种极限, Rudin [1] 把它叫做 K 极限. 命

$$D_\alpha(v) = \left\{ z | z\bar{z}' < 1, |1-z\bar{v}'| < \frac{\alpha}{2}(1-z\bar{z}'), \alpha > 1 \right\}.$$

如果对任意 $\alpha > 1$, 均有

$$\lim_{\substack{z \rightarrow v \\ z \in D_\alpha(v)}} f(z) = \lambda,$$

则称 $f(z)$ 在 v 处具有 K 极限 λ .

不难证明, K 极限强于 H 极限. 即若 $f(z)$ 在 v 处具有 K 极限 λ , 则必具有 H 极限 λ , 但反之不然.

为了证明这一点, 取 $p_n = (0, \dots, 0, 1)$, 则

$$D_\alpha(p_n) = \left\{ z | z\bar{z}' < 1, |1-z_n| < \frac{\alpha}{2}(1-z\bar{z}'), \alpha > 1 \right\},$$

$$H_M(p_n) = \{z | z\bar{z}' < 1, [|z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2 + |z_n - 1|^2]^{\frac{1}{2}} < M \min_{u\bar{u}'=1} |1-z\bar{u}'|\}.$$

设 $\alpha > 2M$, 由于 $\min_{u\bar{u}'=1} |1-z\bar{u}'| = 1 - (z\bar{z}')^{\frac{1}{2}}$, 则对任意 $z \in H_M(p_n)$, 有

$$\begin{aligned} |1-z_n| &\leq [|z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2 + |z_n - 1|^2]^{\frac{1}{2}} \\ &< M(1 - (z\bar{z}')^{\frac{1}{2}}) < M(1 - z\bar{z}') < \frac{\alpha}{2}(1 - z\bar{z}'), \end{aligned}$$

即 $z \in D_\alpha(p_n)$. 这就证明了, 当 $\alpha > 2M$ 时, 有

$$H_M(p_n) \subset D_\alpha(p_n).$$

另一方面, 我们确实能找到这样的点列 $z^{(k)}$, ($k=1, 2, \dots$), 使得 $z^{(k)} \rightarrow p_n$ ($k \rightarrow \infty$), $z^{(k)} \in D_\alpha(p_n)$, 但对于任意正数 M , $z^{(k)} \notin H_M(p_n)$, 例如

$$z^{(k)} = \left(0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{k}}, \left(1 - \frac{1}{k} \right) + i \frac{1}{k} \right) \quad (k=1, 2, \dots)$$

便是这样的点列. 对于球面上一般的点 v , 通过适当的酉变换, 同样可证明, 当 $\alpha > 2M$ 时, $H_M(v)$ 是 $D_\alpha(v)$ 的真子集. 这就证明了我们的结论.

在我们证明定理 1.4.1, 1.4.2, 1.6.2, 1.8.2 中, H 极限都可换成 K 极限. 事实上, 在定理 1.4.1, 1.4.2, 1.6.2, 1.8.2 的证明中, 条件 (1.4.1) 的作用是引导出不等式

$$|1 - z\bar{u}'| \geq \frac{1}{M+1} |1 - v\bar{u}'| \quad (u\bar{u}' = 1).$$

而在 Rudin [1] 的引理 5.4.3 中证明了这样的结论: 如果

$$u\bar{u}' = 1, \quad v\bar{v}' = 1, \quad z \in D_\alpha(v),$$

那末

$$|1 - z\bar{u}'| \geq \frac{1}{4\alpha} |1 - v\bar{u}'|.$$

因此把 H 极限换成 K 极限, 这些定理仍然成立.

关于超球上 Cauchy 型积分的讨论, 还可以参阅 Korányi 与 Vagi 的文章 [1] 以及 Rudin 的书 [1].

第二章 复超球面上的奇异积分方程

§ 2.1 引言

一维的奇异积分方程的理论已经相当完整,并有着极为广泛和重要的应用(例如参阅 Н. И. Мусхелишвили[1], Н. П. Векса[1], Ф. Д. Гахов[1], С. Г. Михлин[1]).

首先研究高维奇异积分方程的是 F. G. Tricomi, 他研究的是二维欧氏空间中的奇异积分方程. 之后, G. Giraud, С. Г. Михлин, W. J. Trjitzinsky, J. Horváth, A. P. Calderon, A. Zygmund, Н. П. Векса, J. J. Kohn, R. T. Seeley, А. В. Бицадзе, E. M. Stein 等等都获得了不少有趣而重要的结果. 在这些工作中,积分大多是在整个欧氏空间中进行,奇异积分中的奇性是用二点之间的距离来刻划的. 我们现在从另一角度来考虑高维的奇异积分方程.

在一维的奇异积分方程中,复变函数的 Cauchy 型积分起着十分重要的作用. 有了 Cauchy 型积分的工具,使得一维的奇异积分方程的处理显得十分简单与深刻. 可是在高维的奇异积分方程的研究中,据作者所看到的,还未有应用 Cauchy 型积分这一工具来处理. 第一次企图利用多复变数的 Cauchy 型积分作为工具来处理高维奇异积分方程及方程组的是龚昇、孙继广[5]. 在龚

昇、孙继广[5]中,应用上一章 § 1.3~§ 1.6 中得到的有关超球的 Cauchy 型积分的结果,来研究复超球面上的奇异积分方程及方程组,对于常系数的奇异积分方程及方程组,得到了比较完整的解决.从处理过程中看,使用这个工具,还是比较简便的.之后,孙继广[1]研究了变系数的奇异积分方程及方程组.以上这些组成本章的主要内容.

在 § 2.2 中,我们证明了含有 Cauchy 核的复合奇性积分公式.在一个复变数时,这就是 Poincaré-Bertrand 公式.在 § 2.3 中,我们得到了二个实的奇性核: h-核及 B-核,并讨论了它们的一些性质. h-核在一个变数时就是 Hilbert 核,但 B-核在一个变数时是不出现的.这也许是显示了多个变数与一个变数时的根本性不同.在 § 2.3 和 § 2.4 中,我们给出了含有 B-核与 h-核的复合奇性积分公式.定理 2.4.1 的系 2.4.1, 在一个复变数时,就是 Hilbert 公式.在这一章中,我们讨论由在复超球面上满足 Lipschitz 条件的复值连续函数所组成的线性空间 \mathcal{L}^* 和由在其上满足 Lipschitz 条件的实值连续函数所组成的线性空间 \mathcal{L} , 这些核实际上是定义了 \mathcal{L}^* 上或 \mathcal{L} 上的线性算子.

§ 2.2 含有 Cauchy 核的复合奇性积分公式

在 § 1.3 中已经证明:若 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), 则 Cauchy 主值 ($v\bar{v}'=1$)

$$\begin{aligned} & \text{v. p. } \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon}} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

是存在的, 并且当 z 沿着使

$$\frac{[(z-v)(\overline{z-v})]^{\frac{1}{2}}}{\min_{u\bar{u}'=1} |1-zu'|} < M \quad (\text{常数})$$

的路径趋于 v 时, 有 Plemelj 公式

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow v} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-z\bar{u}')^{-n} f(u) \dot{u} \\ = \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-v\bar{u}')^{-n} f(u) \dot{u} + \frac{1}{2} f(v). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

(如在 § 1.10 中指出的那样, 在 K 极限意义下, (2.2.2) 依然成立. 今后趋限都在 K 极限意义下进行, 不再申明.) 在 § 1.6~§ 1.8 中, 还证明了有种种不同的方法定义 Cauchy 主值, 并给出各种不同的 Plemelj 公式. 例如, 如果定义 Cauchy 主值为

$$\begin{aligned} \text{v. p. } \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \frac{f(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ \alpha^2(1-\operatorname{Re} v\bar{u}')^2 + \beta^2(\operatorname{Im} v\bar{u}')^2 > \varepsilon}} \frac{f(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

则 (2.2.3) 是存在的, 且有 Plemelj 公式

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow v} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-z\bar{u}')^{-n} f(u) \dot{u} \\ = \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} (1-v\bar{u}')^{-n} f(u) \dot{u} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} f(v), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

这里 $\gamma = \alpha/\beta$.

以这些结果为基础, 我们有

定理 2.2.1 若 $\varphi(w) \in \operatorname{Lip} \alpha$, ($0 < \alpha \leq 1$), ($w\bar{w}'=1$), 则

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}^2} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(w)}{(1-u\bar{w}')^n} \dot{w} = \frac{\varphi(v)}{4}, \quad (2.2.5)$$

其中 $v\bar{v}'=1$, 积分都是取 Cauchy 主值, 而 Cauchy 主值是按照 (2.2.1) 所定义.

在一个变数时, 此即著名的 Poincaré-Bertrand 公式.

定理 2.2.1 还可拓广为

定理 2.2.2 若 $\varphi(u) \in \text{Lip } p$, $0 < p \leq 1$, $(u\bar{u}' = 1)$, 且

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right)^{n-1} = 1,$$

则我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}^2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \frac{\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n} \int_{v\bar{v}'=1(\gamma_2)} \frac{\varphi(w)\dot{w}}{(1-u\bar{w}')^n} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{4\beta_1\beta_2}{(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2)} \right)^{n-1} \varphi(v), \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

其中 $v\bar{v}' = 1$, $\gamma_1 = \alpha_1/\beta_1$, $\gamma_2 = \alpha_2/\beta_2$, 积分都是取 Cauchy 主值, 而 Cauchy 主值是按照 (2.2.3) 所定义.

现在来证定理 2.2.2.

$$\text{记 } \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} = a, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right)^{n-1} = b,$$

$$\text{令 } \varphi_1(v) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \frac{\varphi(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u},$$

$$\varphi_2(v) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \frac{\varphi_1(u)}{(1-v\bar{u}')^n} \dot{u}.$$

作 Cauchy 型积分

$$f(z) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-z\bar{u}')^{-n} \varphi(u) \dot{u},$$

$$f_1(z) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-z\bar{u}')^{-n} \varphi_1(u) \dot{u}.$$

其中 $z\bar{z}' < 1$. 当 z 从 $z\bar{z}' < 1$ 中沿着非切线方向趋于边界时, 由定理 1.6.2,

$$f(v) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} (1-v\bar{u}')^{-n} \varphi(u) \dot{u} + a\varphi(v),$$

$$f_1(v) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} (1-v\bar{u}')^{-n} \varphi_1(u) \dot{u} + b\varphi_1(v).$$

由 $\varphi_1(v)$ 及 $\varphi_2(v)$ 的定义知

$$\varphi_1(v) = f(v) - a\varphi(v), \quad \varphi_2(v) = f_1(v) - b\varphi_1(v).$$

将 $\varphi_1(v)$ 代入 $f_1(z)$ 的表达式中,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-z\bar{u}')^{-n} f(u) \dot{u} \\ &\quad - a\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-z\bar{u}')^{-n} \varphi(u) \dot{u} \\ &= f(z) - af(z) = (1-a)f(z). \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \varphi_2(v) &= (1-a)f(v) - (f(v) - a\varphi(v))b \\ &= (1-a-b)f(v) + ab\varphi(v), \end{aligned}$$

但 $1-a-b=0$, 故得 (2.2.6).

从定理的证明中, 可以得到更一般的结果. 如果我们可以定义一种 Cauchy 主值, 这种 Cauchy 主值当函数 $f(u)$ 满足 Lipschitz 条件时是存在的, 且当 Cauchy 型积分从 $z\bar{z}' < 1$ 在某种限制下趋于边界上的点时, 可以用这种 Cauchy 主值来表示, 即可得到相应的 Plemelj 公式, 而在 Plemelj 公式中, 常数 $\frac{1}{2}$ 被 a 所替代. 另外有一种定义 Cauchy 主值的方法, 使相应的 Plemelj 公式中 $\frac{1}{2}$ 被 b 所替代, 且 $a+b=1$. 那末这二种 Cauchy 主值相复合后得到的值就是 $abf(v)$.

由定理 2.2.2, 可得一组反演公式.

系 2.2.1 若 $\varphi(u) \in \text{Lip } p$, 则由下而 (2.2.7) 所定义的 $\psi(v)$ 也满足 Lipschitz 条件, 且

$$2 \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2\beta_1} \right)^{n-1} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} (1-v\bar{u}')^{-n} \varphi(u) \dot{u} = \psi(v), \quad (2.2.7)$$

$$2 \left(\frac{\alpha_2 + \beta_2}{2\beta_2} \right)^{n-1} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} (1-v\bar{u}')^{-n} \psi(u) \dot{u} = \varphi(v) \quad (2.2.8)$$

相互推导. 但

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right)^{n-1} = 1,$$

$$\gamma_1 = \alpha_1/\beta_1, \quad \gamma_2 = \alpha_2/\beta_2.$$

特别取 Cauchy 主值的定义为 (2.2.1), 则有

$$2\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-v\bar{u}')^{-n} \varphi(u) \dot{u} = \psi(v), \quad (2.2.9)$$

$$2\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1-v\bar{u}')^{-n} \psi(u) \dot{u} = \varphi(v) \quad (2.2.10)$$

相互推导.

从定理 2.2.2 的证明过程中可以看出, 我们有

定理 2.2.3 若 $\varphi(u) \in \text{Lip } p$ ($0 < p \leq 1$), $v\bar{v}'=1$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}^2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \frac{\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \frac{\varphi(w) \dot{w}}{(1-u\bar{w}')^n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right)^{n-1} \right) \\ & \quad \cdot \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \frac{\varphi(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n} + \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \right) \\ & \quad \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \varphi(v), \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

其中 $\gamma_1 = \alpha_1/\beta_1$, $\gamma_2 = \alpha_2/\beta_2$, 积分都是取 Cauchy 主值, 而 Cauchy 主值是按 (2.2.3) 所定义.

§ 2.3 B-核与 h-核, B-型积分与 h-型积分

若 $f(z) = U(z) + iV(z)$ 在 $z\bar{z}' < 1$ 内解析, 在 $z\bar{z}' \leq 1$ 连续 (事实上, 由定理 0.2.2, 只要求 $f(z) \in H_1$ 已足够), 则根据圆型域内的解析函数的 Schwarz 公式, 有

$$f(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} U(u) S(z, u) \dot{u} + iV(0), \quad (2.3.1)$$

其中 $S(z, u) = 2H(z, \bar{u}) - 1$ 为 Schwarz 核, 而

$$H(z, \bar{u}) = (1 - z\bar{u}')^{-n}.$$

令

$$B(z, u) = \operatorname{Re}(S(z, u)) = H(z, \bar{u}) + H(u, \bar{z}) - 1, \quad (2.3.2)$$

$$h(z, u) = \operatorname{Im}(S(z, u)) = (H(z, \bar{u}) - H(u, \bar{z}))/i, \quad (2.3.3)$$

于是公式(2.3.1)也可以写成

$$U(z) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} U(u) B(z, u) \dot{u}, \quad (2.3.4)$$

$$V(z) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} U(u) h(z, u) \dot{u} + V(0). \quad (2.3.5)$$

在 $n=1$ 的情形, 核 $B(z, u)$ 与 $h(z, u)$ 分别为 Poisson 核与共轭 Poisson 核; 但当 $n>1$ 时, $B(z, u)$ 与 $h(z, u)$ 只能分别称之为 Schwarz 核的实部与虚部, 而不能称之为 Poisson 核与共轭 Poisson 核, 因为它们已不再具有作为 Poisson 核与共轭 Poisson 核的一些重要性质了.

若 $U(u) \in \operatorname{Lip} p (0 < p \leq 1)$, 在(2.3.5)中令 z 趋于边界上的一点 v , 则由定理 1.6.2 可得

$$V(v) = \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} U(u) h(v, u) \dot{u} + V(0), \quad (2.3.6)$$

其中

$$h(v, u) = (H(v, \bar{u}) - H(u, \bar{v}))/i \quad (2.3.7)$$

称为 h-核, 当 $n=1$ 时, 它就是熟知的 Hilbert 核. 而 Cauchy 主值是按(2.2.3)所定义的.

为了确定起见, 不妨取 $V(0) = 0$, 则我们有

$$V(v) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} U(u) h(v, u) \dot{u}, \quad (2.3.8)$$

此处积分是按照由(2.2.3)所定义的 Cauchy 主值的意义下进行的. 由(2.3.7)及定理 1.5.1, 易知: 若 $z\bar{z}' < 1$ 内的 B -调和函数 $U(z)$ 的边界值 $U(u) \in \operatorname{Lip} \alpha$, 则它的(唯一确定的)共轭 B -调和函数 $V(z)$ 的边界值 $V(u)$ (如(2.3.8)所示) $\in \operatorname{Lip}(\alpha - \delta)$, δ 是小于

α 的任一正数.

定义 如果在 $u\bar{u}'=1$ 上任与一个可积实值函数 $\varphi(u)$, 我们称

$$\Phi(z) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(z, u) \dot{u} \quad (2.3.9)$$

为 B-型积分, 称

$$\Psi(z) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) h(z, u) \dot{u} \quad (2.3.10)$$

为 h-型积分.

(2.3.9) 及 (2.3.10) 定义了一对在 $zz' < 1$ 内共轭的 B-调和函数. 自然, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ 在边界上的极限值, 当 $n > 1$ 时未必存在, 即使存在, 也未必是 $\varphi(v)$ 及 $\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) h(v, u) \dot{u}$. 当 $n > 1$ 时, $\varphi(v)$ 即使是连续的, 或是满足 Lipschitz 条件, 或是有更强一些的要求, $\Phi(z)$ 的极限值也不一定是 $\varphi(v)$, 这显示出多复变数与单复变数在这时候有着根本性的不同.

由定理 1.6.2, 我们可以得到

定理 2.3.1 若 $\varphi(u) \in \text{Lip } p$, 那末由 (2.3.9) 及 (2.3.10) 所定义的 $\Phi(z)$ 与 $\Psi(z)$ 在边界上的极限值存在, 并且有

$$\begin{aligned} \Phi(v) = \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} \\ + \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \varphi(v), \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

及

$$\Psi(v) = \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u}. \quad (2.3.12)$$

(2.3.11) 中的

$$B(v, u) = H(v, \bar{u}) + H(u, \bar{v}) - 1 \quad (2.3.13)$$

称为 B-核. 这里 Cauchy 主值按 (2.2.3) 所定义.

证 事实上, z 从 $zz' < 1$ 内趋于 v , 则

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \lim_{z \rightarrow v} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) (H(z, \bar{u}) + H(u, \bar{z}) - 1) \dot{u} \\
&= \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) H(v, \bar{u}) \dot{u} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \varphi(u) + \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) H(v, \bar{u}) \dot{u} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \varphi(u) - \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \dot{u} \\
&= \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) (H(v, \bar{u}) + H(u, \bar{v}) - 1) \dot{u} \\
&\quad + \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \varphi(v) \\
&= \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} + \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \varphi(v).
\end{aligned}$$

同理可证 (2.3.12),

公式 (2.3.11) 与 (2.3.12) 可以导出一系列重要的推论.

系 2.3.1 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 则 $\varphi(u)$ 是 $z\bar{z}' < 1$ 内某一个 B-调和函数的边界值的充分和必要条件是

$$\text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} = \left(1 - \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \right) \varphi(v). \quad (2.3.14)$$

公式 (2.3.11) 及 (2.3.12) 表明: 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 则

$$\left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \varphi(v) + \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u}$$

及
$$\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u}$$

必分别为 $z\bar{z}' < 1$ 内的二个 B-调和函数的边界值, 因而利用系 2.3.1 可得

系 2.3.2 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned}
&\omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_2)} \varphi(w) B(u, w) \dot{w} \\
&= \left(1 - \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \right) \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) B(u, v) \dot{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right)^{n-1} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) B(u, v) \dot{u} \\
& + \left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \right) \varphi(v), \quad (2.3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_2)} \varphi(w) h(u, w) \dot{w} \\
& = \left(1 - \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \right) \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) h(u, v) \dot{u}, \quad (2.3.16)
\end{aligned}$$

这里 $\gamma_1 = \alpha_1/\beta_1$, $\gamma_2 = \alpha_2/\beta_2$, 积分都是按由 (2.2.3) 所定义的 Cauchy 主值进行.

同时, 利用 (2.3.11) 及 (2.3.12) 容易得到

系 2.3.3 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned}
& \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} \varphi(w) B(u, w) \dot{w} \\
& = \left(1 - \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \right) \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u}. \quad (2.3.17)
\end{aligned}$$

事实上, 由 (2.3.8), (2.3.11), (2.3.12) 知

$$\begin{aligned}
& \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} \varphi(w) B(u, w) \dot{w} \\
& = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \left(\Phi(u) - \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \varphi(u) \right) h(v, u) \dot{u} \\
& = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \Phi(u) h(v, u) \dot{u} \\
& \quad - \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} \\
& = \Psi(v) - \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} \\
& = \left(1 - \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1} \right) \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u}.
\end{aligned}$$

系 2.3.4 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned} & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{v\bar{v}'=1} \dot{v} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} \\ &= \left(1 - \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta}\right)^{n-1}\right) \omega_{2n-1}^{-1} \int_{v\bar{v}'=1} \varphi(v) \dot{v}, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

$$\omega_{2n-1}^{-2} \int_{v\bar{v}'=1} \dot{v} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} = 0. \quad (2.3.19)$$

事实上, (2.3.18) 式之左端等于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}'=1} \left(\Phi(v) - \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta}\right)^{n-1} \varphi(v) \right) \dot{v} \\ &= \Phi(0) - \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta}\right)^{n-1} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{v\bar{v}'=1} \varphi(v) \dot{v} \\ &= \omega_{2n-1}^{-1} \int_{v\bar{v}'=1} \varphi(v) B(0, v) \dot{v} \\ &\quad - \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta}\right)^{n-1} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{v\bar{v}'=1} \varphi(v) \dot{v} \\ &= \left(1 - \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta}\right)^{n-1}\right) \omega_{2n-1}^{-1} \int_{v\bar{v}'=1} \varphi(v) \dot{v}. \end{aligned}$$

同理可得 (2.3.19).

在多复变数函数论中, 一般来说, 以下的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} = 0, & k, l = 1, 2, \dots, n, \\ u(z_1, \dots, z_n) \Big|_{u\bar{u}'=1} = \varphi(u) \end{cases} \quad (2.3.20)$$

是无解的 (参阅 Bergman [1]). 但从系 2.3.1, 我们得到

系 2.3.5 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 则由 (2.3.20) 所定义的 Dirichlet 问题有解的充分与必要条件为

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} = \left(1 - \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta}\right)^{n-1}\right) \varphi(v).$$

若这条件满足, (3.20) 有唯一解, 并且它的解就是

$$u(z) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(z, u) \dot{u}.$$

特别值得注意的是 $\alpha = \beta$ 的情形, 也就是 Cauchy 主值是按照

(2.2.1)来定义的. 这时候, (2.3.11)成为

$$\Phi(v) = \text{v. p. } \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} + \varphi(v), \quad (2.3.21)$$

(2.3.14)成为

$$\text{v. p. } \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(v, u) = 0, \quad (2.3.22)$$

(2.3.15)成为

$$\begin{aligned} & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) B(u, w) \dot{w} \\ & + \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} = 0, \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

(2.3.16)成为

$$\omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) h(u, w) \dot{w} = 0,$$

(2.3.17)成为

$$\omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) B(u, w) \dot{w} = 0, \quad (2.3.24)$$

(2.3.18)成为

$$\omega_{2n-1}^{-2} \int_{v\bar{v}'=1} \dot{v} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} = 0,$$

而(2.3.20)有解的充要条件也成为

$$\int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} = 0.$$

§ 2.4 含有 h-核的复合奇性积分公式

在上一节中, 我们已经得到了一系列含有 B-核与 h-核的复合奇性积分公式, 此外, 我们还有

定理 2.4.1 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, $u\bar{u}'=1$, 则

$$\omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_*)} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_*)} \varphi(w) h(u, w) \dot{w}$$

$$\begin{aligned}
&= -(1-2a)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{w}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} \\
&\quad - 2a\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{w}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} \\
&\quad + 2a\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{w}'=1} \varphi(u) \dot{u} - 2a(1-2a+2b)\varphi(v).
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

这里积分都是按照(2.2.3)所定义的 Cauchy 主值意义下进行的, 而

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \\
a = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1}, \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right)^{n-1}.$$

证 由于

$$\frac{2}{(1-v\bar{u}')^n} = B(v, u) + i\hbar(v, u) + 1, \tag{2.4.2}$$

根据定理 2.2.3 及上节的结果, 有

$$\begin{aligned}
&\omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{w}'=1(\gamma_2)} (1-v\bar{u}')^{-n} \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} (1-u\bar{w}')^{-n} \varphi(w) \dot{w} \\
&= (1-a-b)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{w}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) (1-v\bar{u}')^{-n} \dot{u} \\
&\quad + (1-a)a\varphi(v).
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

(2.4.3)的左边, 由(2.4.2)为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{w}'=1(\gamma_2)} (B(v, u) + i\hbar(v, u) + 1) \dot{u} \\
&\quad \cdot \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} (B(u, w) + i\hbar(u, w) + 1) \varphi(w) \dot{w}.
\end{aligned}$$

由(2.3.15),

$$\begin{aligned}
&\omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{w}'=1(\gamma)} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} \varphi(w) B(u, w) \dot{w} \\
&= -2a\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{w}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} + 2a(1-2b)\varphi(v)
\end{aligned}$$

$$+ (1-2b)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) B(u, v) \dot{u}.$$

由(2.3.17),

$$\begin{aligned} & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} B(u, w) \varphi(w) \dot{w} \\ &= (1-2a)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u}, \end{aligned}$$

由(2.3.18),

$$\begin{aligned} & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} B(u, w) \varphi(w) \dot{w} \\ &= (1-2a)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \dot{u}, \end{aligned}$$

由(2.3.16)、(2.3.19),

$$\begin{aligned} & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} h(u, w) \varphi(w) \dot{w} \\ &= (1-2b)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) h(u, v) \dot{u}, \\ & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1} \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} h(u, w) \varphi(w) \dot{w} = 0 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} (B(v, u) + ih(v, u) + 1) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} \varphi(w) \dot{w} \\ &= 2\omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} H(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) \dot{w} \\ &= \frac{2(1-b)}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) \dot{w}, \end{aligned}$$

所以(2.4.3)的左边为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ -2a\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} + 2a(1-2b)\varphi(v) \right. \\ & \quad + (1-2b)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) B(u, v) \dot{u} \\ & \quad \left. + i(1-2a)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i(1-2b)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u)h(u, v)\dot{u} \\
& + 2(1-b)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u)\dot{u} \\
& - \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} h(v, u)\dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} h(u, w)\varphi(w)\dot{w} \Big\},
\end{aligned}$$

而(2.4.3)的右边为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(1-a-b)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u)(B(v, u) + ih(v, u) + 1)\dot{u} \\
& + (1-a)a\varphi(v).
\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
& \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} h(v, u)\dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} h(u, w)\varphi(w)\dot{w} \\
& = -(1-2a)\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u)B(v, u)\dot{u} \\
& - 2a\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u)B(v, u)\dot{u} \\
& + 2a\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u)\dot{u} - 2a(1-2a+2b)\varphi(v).
\end{aligned}$$

这是因为: 当 z 趋于边界上一点 v 时,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow v} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u)h(z, u)\dot{u} & = \text{v. p.} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u)h(v, u)\dot{u} \\
& = \text{v. p.} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u)h(v, u)\dot{u}.
\end{aligned}$$

从定理 2.4.1 及系 2.3.1, 可以得到

系 2.4.1 若 $U(z)$ 为 $z\bar{z}' < 1$ 内的 B-调和函数, 且有边界值 $U(u)$, 且 $U(u) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned}
& \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} h(v, u)\dot{u} \int_{w\bar{w}'=1(\gamma_1)} h(u, w)U(w)\dot{w} \\
& = 2a\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} U(u)\dot{u} - 2a(1-2a+2b)U(v).
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

这可以看成 Hilbert 公式的推广.

特别重要的情形是 $\alpha = \beta$ 的时候, 如果在定理 2.4.1 中, 所有的 Cauchy 主值都是按照 (2.2.1) 来定义, 则定理 2.4.1 及系 2.4.1 成为

定理 2.4.2 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned} & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) \dot{u} \int_{u\bar{w}'=1} \varphi(w) h(u, w) \dot{w} \\ &= -\varphi(v) - \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} \\ & \quad + \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \dot{u}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

系 2.4.2 (Hilbert 公式) 若 $U(z)$ 为 $zz' < 1$ 内的 B -调和函数, 具有边界值 $U(u)$, 且 $U(u) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned} & \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} U(w) h(u, w) \dot{w} \\ &= -U(v) + \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} U(u) \dot{u}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

当 $n=1$ 时, 上式即为著名的 Hilbert 公式.

前已指出, 当 $n=1$ 时, 核 $h(v, u)$ 就是 Hilbert 核 $h(\tau, \theta) = \operatorname{ctg} \frac{\tau - \theta}{2}$. 易知, $h(\tau, \theta)$ 有如下的重要性质: 设 $\varphi(\theta)$ 是在 $|z|=1$ 上满足 Lipschitz 条件的实值函数, 则 $\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) h(\tau, \theta) d\theta = 0$ 的充分与必要条件是 $\varphi(\theta) = \text{常数}$. 但当 $n > 1$ 时, 如果 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 且 $\int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} = 0$, $\varphi(u)$ 未必是常数. 这是因为任取 $\psi(u) \in \mathcal{L}$, 命 $\varphi(u) = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{w}'=1} \psi(w) B(u, w) \dot{w}$, 则必有 $\int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \cdot h(v, u) \dot{u} = 0$ (由 (2.3.24)). 例如取 $\psi(u) = u_1 \bar{u}_2 + \bar{u}_1 u_2$, 记 $\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (u_1 \bar{u}_2 + \bar{u}_1 u_2) \dot{u} = C$, 则相应的 $\varphi(u) = C - u_1 \bar{u}_2 - \bar{u}_1 u_2$, 它在 $u\bar{u}'=1$ 上并非常数, 然而 $\int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} = 0$.

不过从系 2.4.2 可得

系 2.4.3 若 $\varphi(u) \in \mathcal{L}$, 并且是 $zz' < 1$ 内某 B -调和函数的边界值, 则 $\int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} = 0$ 的充分与必要条件是 $\varphi(u) =$ 常数.

充分性是显然的. 必要性可由

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) \dot{u} \int_{u\bar{w}'=1} \varphi(w) h(u, w) \dot{w} \\ &= -\varphi(v) + \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \dot{u} \end{aligned}$$

立刻得到.

§ 2.5 算子 H, B, h

在 § 2.1 中, 我们已经定义了线性空间 \mathcal{L}^* 和 \mathcal{L} . 现在定义算子 H, B, h 和 A, I, O 如下:

$$H_\gamma \varphi = 2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2\beta} \right)^{n-1} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) H(v, \bar{u}) \dot{u} \quad (\varphi \in \mathcal{L}^*), \quad (2.5.1)$$

$$B_\gamma \varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} \quad (\varphi \in \mathcal{L}), \quad (2.5.2)$$

$$h_\gamma \varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} \quad (\varphi \in \mathcal{L}). \quad (2.5.3)$$

这里积分都是 Cauchy 主值意义下的积分, 而 Cauchy 主值按 (2.2.3) 定义. 特别当 $\alpha = \beta$ 时, 即 Cauchy 主值按 (2.2.1) 定义, 则定义 H, B, h 如下:

$$H\varphi = 2\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) H(v, \bar{u}) \dot{u} \quad (\varphi \in \mathcal{L}^*), \quad (2.5.4)$$

$$B\varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} \quad (\varphi \in \mathcal{L}), \quad (2.5.5)$$

$$h\varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} \quad (\varphi \in \mathcal{L}). \quad (2.5.6)$$

另外,算子 A, I, O 定义如下:

$$A\varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \bar{u} \quad (\varphi \in \mathcal{L}^*), \quad (2.5.7)$$

$$I\varphi = \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{L}^*), \quad (2.5.8)$$

$$O\varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathcal{L}^*). \quad (2.5.9)$$

显然,它们是相应的线性空间 \mathcal{L}^* 或 \mathcal{L} 上的线性算子.

所有在 $u\bar{u}'=1$ 上满足 Lipschitz 条件, 并且是 $z\bar{z}'<1$ 内某一 B -调和函数的边界值的实值函数的全体, 显然构成实数域上的一个线性空间, 并且是 \mathcal{L} 的一个子空间, 记之为 \mathcal{B} .

利用线性算子的符号, 将 § 2.2, § 2.3 和 § 2.4 中的结果, 列表如下:

$$H_n H_n = \frac{1}{b} (1-a-b) H_n + \frac{1}{b} (1-a) I \quad (\text{在 } \mathcal{L}^* \text{ 上}), \quad (2.5.10)$$

这里

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^{n-1}, \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right)^{n-1}. \quad (2.5.11)$$

特别当 $a+b=1$ 时, 就有

$$H_\gamma H_{\gamma^*} = H_{\gamma^*} H_\gamma = I \quad (\text{在 } \mathcal{L}^* \text{ 上}), \quad (2.5.12)$$

这里

$$\gamma^* = \frac{2(1+\gamma)}{[2(1+\gamma)^{n-1} - 2^{n-1}]^{\frac{1}{n-1}}} - 1, \quad (2.5.13)$$

而上式当

$$\gamma > 2^{\frac{n-2}{n-1}} - 1 \quad (2.5.14)$$

时是有意义的.

当 $\alpha=\beta$ 时, $a=b=\frac{1}{2}$, 故有

$$H^2 = I \quad (\text{在 } \mathcal{L}^* \text{ 上}). \quad (2.5.15)$$

对于算子 B 有

$$B_{\gamma_n} B_{\gamma_n} = (1-2a) B_{\gamma_n} - 2b B_{\gamma_n} + 2b(1-2a) I \quad (\text{在 } \mathscr{L} \text{ 上}), \quad (2.5.16)$$

这里 a, b 由 (2.5.11) 所定义, 特别有

$$B^2 = -B \quad (\text{在 } \mathscr{L} \text{ 上}). \quad (2.5.17)$$

对于算子 h 有

$$h_{\gamma_n} h_{\gamma_n} = -(1-2a) B_{\gamma_n} - 2a B_{\gamma_n} + 2a A - 2a(1-2a+2b) I \quad (\text{在 } \mathscr{L} \text{ 上}). \quad (2.5.18)$$

特别有

$$h^2 = -I - B + A \quad (\text{在 } \mathscr{L} \text{ 上}). \quad (2.5.19)$$

显然

$$A^2 = A \quad (\text{在 } \mathscr{L}^* \text{ 上}). \quad (2.5.20)$$

在 \mathscr{L} 上有

$$h_{\gamma_n} B_{\gamma_n} = B_{\gamma_n} h_{\gamma_n} = (1-2a) h_{\gamma_n}, \quad (2.5.21)$$

$$A B_{\gamma_n} = B_{\gamma_n} A = (1-2a) A, \quad (2.5.22)$$

$$A h_{\gamma_n} = h_{\gamma_n} A = 0. \quad (2.5.23)$$

特别有

$$AB = BA = 0, \quad (2.5.24)$$

$$Ah = hA = 0, \quad (2.5.25)$$

$$Bh = hB = 0. \quad (2.5.26)$$

设 $\varphi \in \mathscr{L}$, 则

$$B_{\gamma_n} \varphi = (1-2a) I \Leftrightarrow \varphi \in \mathscr{B}, \quad (2.5.27)$$

特别有

$$B\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi \in \mathscr{B}. \quad (2.5.28)$$

设 $\varphi \in \mathscr{B}$, 则

$$h_{\gamma_n} \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \text{常数}. \quad (2.5.29)$$

在以下几节中, 我们将利用这些公式, 求解复超球面上的、常系数的奇异积分方程和方程组.

在 § 2.4 中已经指出, 当 z 趋于边界上一点 v 时,

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow v} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) h(z, u) \dot{u} \\
&= \text{v. p.} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u} \\
&= \text{v. p.} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) h(v, u) \dot{u}.
\end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow v} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(z, u) \dot{u} \\
&= \text{v. p.} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} + 2(1-a)\varphi(v) \\
&= \text{v. p.} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) B(v, u) \dot{u} + 2(1-b)\varphi(v), \\
& \lim_{s \rightarrow v} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) H(z, u) \dot{u} \\
&= \text{v. p.} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) H(v, u) \dot{u} + a\varphi(v) \\
&= \text{v. p.} \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_2)} \varphi(u) H(v, u) \dot{u} + b\varphi(v).
\end{aligned}$$

特别取 $\alpha_2 = \beta_2$, 则 $\gamma_2 = 1$, 于是有

$$h_{\gamma_1} = h, \quad (2.5.30)$$

$$B_{\gamma_1} = B - (1-2a)I, \quad (2.5.31)$$

$$H_{\gamma_1} = H + \frac{1}{2}(1-2a)I. \quad (2.5.32)$$

所以任意带有奇异积分算子 h_{γ} , B_{γ} , H_{γ} 的奇异积分方程, 均可归化为带有奇异积分算子 h , B , H 的奇异积分方程. 并且本节中有关 h_{γ} , B_{γ} , H_{γ} 的复合奇性积分公式, 均可由 h , B , H 的复合奇性积分公式, 利用 (2.5.30), (2.5.31), (2.5.32) 得出来. 所以以下主要讨论有 h , B , H 核的奇异积分方程及方程组.

§ 2.6 有 Cauchy 核的奇异积分方程

本节考虑方程

$$s_1\varphi + t_1H\varphi + K\varphi = f, \quad (2.6.1)$$

其中 s_1, t_1 为复数, 已给 $f \in \mathcal{L}$, $K\varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{|u|=1} \varphi(u) K(v, u) \bar{u}$,

核 $K(v, u)$ 是对 v, u 皆满 Lipschitz 条件的复值函数.

由 (2.5.32), 方程 (2.6.1) 就是

$$\left[s_1 + \frac{1}{2}(1-2c)t_1 \right] \varphi + t_1 H\varphi + K\varphi = f,$$

这里
$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1}.$$

记

$$s_1 + \frac{1}{2}(1-2c)t_1 = s, \quad t_1 = t, \quad (2.6.2)$$

则上式成为

$$s\varphi + tH\varphi + K\varphi = f. \quad (2.6.3)$$

现在来解方程 (2.6.3). 先考虑其特征方程

$$s\varphi + tH\varphi = f, \quad (2.6.4)$$

并设 $s^2 - t^2 \neq 0$.

用算子

$$M = sI - tH \quad (2.6.5)$$

作用于 (2.6.4) 式的两端, 应用 (2.5.15), 得到

$$(s^2 - t^2)\varphi = sf - tHf,$$

即

$$\varphi = [s/(s^2 - t^2)]f - [t/(s^2 - t^2)]Hf \quad (2.6.6)$$

是方程 (2.6.4) 在 \mathcal{L}^* 内的唯一解.

对于方程 (2.6.3), 我们可以应用如 (2.6.5) 所示的算子 M , 把它归结为一个与之等价的 Fredholm 方程.

事实上, 以 M 作用于 (2.6.3), 应用 (2.5.15), 立得

$$(s^2 - t^2)\varphi + sK\varphi - tHK\varphi = sf - tHf. \quad (2.6.7)$$

由于

$$\begin{aligned} HK\varphi &= \omega_{2n-1}^{-2} \int_{u\bar{u}'=1} (1 - v\bar{u}')^{-n} \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) K(u, w) \dot{w} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{2n-1}^{-2} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon}} (1 - v\bar{u}')^{-n} \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) K(u, w) \dot{w} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{2n-1}^{-2} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) \dot{w} \int_{|1-v\bar{u}'| > \varepsilon} (1 - v\bar{u}')^{-n} K(u, w) \dot{u}, \end{aligned}$$

应用 Lebesgue 定理, 上式即为

$$\omega_{2n-1}^{-2} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(w) \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} (1 - v\bar{u}')^{-n} K(u, w) \dot{u}.$$

由定理 1.5.2, $\omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} (1 - v\bar{u}')^{-n} K(u, w) \dot{u} = K_1(v, w)$ 对 v, w 皆满足 Lipschitz 条件, 所以 (2.6.7) 是一个 Fredholm 方程, 可写之为

$$s_2\varphi + K_2\varphi = F, \quad (2.6.8)$$

其中 $s_2 = s^2 - t^2 \neq 0$, $F = Mf$, $K_2 = sK - tHK$.

方程 (2.6.8) 与 (2.6.3) 是等价的, 这只需证明, 凡方程 (2.6.8) 的解 (即 (2.6.7) 的解), 必满足方程 (2.6.3). 将算子

$$M^* = sI + tH$$

作用于 (2.6.7) 式两端, 应用 (2.5.15), 便可得 (2.6.3).

综上所述, 便得

定理 2.6.1 设在方程 (2.6.3) 中, s, t 为复数, 满足 $s^2 - t^2 \neq 0$, 已给 $f \in \mathcal{L}^*$, 积分算子 K 的核 $K(v, w)$ 满足 Lipschitz 条件, 则

(i) 方程 (2.6.3) 的特征方程 (2.6.4) 在 \mathcal{L}^* 内有唯一解, 如 (2.6.6) 所示;

(ii) 在 \mathcal{L}^* 内, 奇异积分方程 (2.6.3) 与 Fredholm 方程 (2.6.8) 等价.

与之相等价的定理是

定理 2.6.2 设在方程(2.6.1)中, s_1, t_1 为复数, 满足

$$s_1^2 + (1-2c)cs_1t_1 + \left(c^2 - c - \frac{3}{4}\right)t_1^2 \neq 0,$$

已给 $f \in \mathcal{L}^*$, 积分算子 K 的核 $K(v, u)$ 满足 Lipschitz 条件, 则

(i) 方程(2.6.1)的特征方程 $s_1\varphi + t_1H\varphi = f$ 在 \mathcal{L}^* 内有唯一解

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{s_1 + \left(\frac{1}{2} - c\right)t_1}{s_1^2 + (1-2c)cs_1t_1 + \left(c^2 - c - \frac{3}{4}\right)t_1^2} f \\ & - \frac{t_1}{s_1^2 + (1-2c)cs_1t_1 + \left(c^2 - c - \frac{3}{4}\right)t_1^2} Hf; \end{aligned}$$

(ii) 在 \mathcal{L}^* 内, 奇异积分方程(2.6.1)与 Fredholm 方程(2.6.8)等价.

当然定理 2.6.2 也可以用(2.5.10), (2.5.12)等来直接证明之.

§ 2.7 有 B-核和 h-核的奇异积分方程

本节讨论方程

$$L\varphi \equiv p_1\varphi + q_1B_{\gamma_1}\varphi + r_1h_{\gamma_1}\varphi + s_1A\varphi = f, \quad (2.7.1)$$

其中 p_1, q_1, r_1, s_1 为实数, 已给 $f \in \mathcal{L}$, 在 \mathcal{L} 内求解. 由(2.5.30)及(2.5.31), 方程(2.7.1)等价于

$$p\varphi + qB\varphi + rh\varphi + sA\varphi = f, \quad (2.7.2)$$

这里

$$p = p_1 - (1-2\alpha)q_1, \quad q = q_1, \quad r = r_1, \quad s = s_1. \quad (2.7.3)$$

先假设 $p - q = p_1 - 2(1-\alpha)q_1 \neq 0$, $(p_1 - (1-2\alpha)q_1)^2 + r_1^2 \neq 0$.

(i) 当 $p+s \neq 0$ 时, 易知算子

$$M = \frac{p}{p^2+r^2} I - \frac{r^2+pq}{(p-q)(p^2+r^2)} B \\ - \frac{r}{p^2+r^2} h + \frac{r^2-ps}{(p+s)(p^2+r^2)} A \quad (2.7.4)$$

是算子

$$L = pI + qB + rh + sA$$

的逆算子, 即

$$ML = LM = I,$$

因而方程 (2.7.2) 在这时有唯一解

$$\varphi = Mf.$$

将 (2.7.3) 的值代入 (2.7.4), 就得到方程 (2.7.1) 的解为

$$\varphi = \left[\frac{p_1^2 - 2(2-3a)p_1q_1 + (3-4a)(1-2a)q_1^2 - r_1^2(1-2a)}{[p_1 - 2(1-a)q_1][(p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2]} I \right. \\ - \frac{r_1^2 + p_1q_1 - (1-2a)q_1^2}{[p_1 - 2(1-a)q_1][(p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2]} B_n \\ - \frac{r_1}{(p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2} h_n \\ \left. + \frac{r_1^2 - p_1s_1 + (1-2a)q_1s_1}{(p_1 - (1-2a)q_1 + s_1)[(p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2]} A \right] f. \quad (2.7.5)$$

(ii) 当 $p+s=0$ 时,

① 如果 $p \neq 0$, 方程为

$$p(I-A)\varphi + qB\varphi + rh\varphi = f. \quad (2.7.6)$$

令

$$(I-A)\varphi = \psi, \quad (2.7.7)$$

则 ψ 应满足方程

$$p\psi + qB\psi + rh\psi = f.$$

由 (i) 中结论, 上述方程有唯一解

$$\psi = \left(\frac{p}{p^2+r^2} I - \frac{r^2+pq}{(p-q)(p^2+r^2)} B \right. \\ \left. - \frac{r}{p^2+r^2} h + \frac{r^2}{p(p^2+r^2)} A \right) f. \quad (2.7.8)$$

将(2.7.8)代入(2.7.7), 易知当且仅当 $Af=0$ 时, 方程(2.7.6)有解, 并且解为

$$\varphi = \left(\frac{p}{p^2+r^2} I - \frac{r^2+pq}{(p-q)(p^2+r^2)} B - \frac{r}{p^2+r^2} h + \frac{r^2}{p(p^2+r^2)} A \right) f + c_1, \quad (2.7.9)$$

其中 c_1 为任一实数.

于是方程(2.7.1)有解

$$\begin{aligned} \varphi = & \left[\frac{p_1^2 - 2(2-3a)p_1q_1 + (3-4a)(1-2a)q_1^2 - r_1^2(1-2a)}{[p_1 - 2(1-a)q_1][(p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2]} I \right. \\ & - \frac{r_1^2 + p_1q_1 - (1-2a)q_1^2}{[p_1 - 2(1-a)q_1][(p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2]} B_{\gamma_1} \\ & - \frac{r_1}{(p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2} h_{\gamma_1} \\ & \left. + \frac{r_1^2}{[p_1 - (1-2a)q_1][(p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2]} A \right] f + c_1. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

② 如果 $p=0$, 方程(2.7.2)为

$$qB\varphi + rh\varphi = f \quad (qr \neq 0). \quad (2.7.11)$$

以算子 B 作用之, 得 $B(q\varphi + f) = 0$, 因而

$$\varphi = -\frac{1}{q}(f+U) \quad (U \in \mathscr{B}). \quad (2.7.12)$$

将(2.7.12)代入(2.7.11), 知 U 必须满足方程

$$hU = W, \quad (2.7.13)$$

其中 $W = -\frac{q}{r}f - \frac{q}{r}Bf - hf \in \mathscr{B}$.

用算子 h 作用于(2.7.13), 得

$$U - AU = -hW. \quad (2.7.14)$$

记 $AU = t$, 以 $U = -hW + t$ 代入(2.7.13), 利用(2.5.19)及(2.5.28)可知, 当且仅当 $AW = 0$ 时, 方程(2.7.13)在 \mathscr{B} 内有解,

并且它的解是

$$U = -hW + c_1,$$

其中 c_1 为任一实数. 由此可知, 当且仅当 $Af=0$ 时, 方程 (2.7.11) 在 \mathcal{L} 内有解, 解为

$$\varphi = -\frac{1}{q}(f - hW + c_1) = \left(\frac{1}{q}B - \frac{1}{r}h - \frac{1}{q}A\right)f + c'_1, \quad (2.7.15)$$

其中 c'_1 为任一实数.

于是方程 (2.7.1) 的解为

$$\varphi = \left(\frac{1}{q}B_n - \frac{1}{r}h_n - \frac{1}{q}A + (1-2a)I\right)f + c'_1. \quad (2.7.16)$$

于是我们得到

定理 2.7.1 设在方程 (2.7.2) 中, p, q, r, s 为实数, 且 $p-q \neq 0, p^2+r^2 \neq 0$, 已给 $f \in \mathcal{L}$, 那末

(i) 当 $p+s \neq 0$ 时, (2.7.2) 在 \mathcal{L} 内有唯一解, 解为 $\varphi = Mf$, M 由 (2.7.4) 所定义;

(ii) 当 $p+s=0$ 时, 则当且仅当 $Af=0$ 时, (2.7.2) 在 \mathcal{L} 内有解, 并且如果 $p \neq 0$, 则有解如 (2.7.9) 所示, 如果 $p=0$, 则解如 (2.7.15) 所示.

与之等价的定理为

定理 2.7.2 设在方程 (2.7.1) 中, p_1, q_1, r_1, s_1 为实数, 且 $p_1 - 2(1-a)q_1 \neq 0, (p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2 \neq 0$, 已给 $f \in \mathcal{L}$, 那末当

(i) $p_1 - (1-2a)q_1 + s_1 \neq 0$ 时, (2.7.1) 在 \mathcal{L} 内有唯一解, 解为 (2.7.5) 所示;

(ii) $p_1 - (1-2a)q_1 + s_1 = 0$ 时, 则当且仅当 $Af=0$ 时, (2.7.1) 在 \mathcal{L} 内有解, 并且如果 $p_1 \neq (1-2a)q_1$, 则有解如 (2.7.10) 所示; 如果 $p_1 = (1-2a)q_1$, 则解如 (2.7.16) 所示.

§ 2.8 一些例外情形

在 § 2.6, § 2.7 的讨论中, 都有一些例外的情形, 如对方程 (2.6.3), 当 $s^2 - t^2 = 0$ 时; 以及方程 (2.7.2) 中 $p = q$ 或 $p^2 + r^2 = 0$ 的情形.

在方程 (2.6.1) 及 (2.7.1) 也都有相应的例外情况, 不过是与 (2.6.3) 及 (2.7.2) 的例外情况相对应的, 故只讨论 (2.6.3) 及 (2.7.2) 的例外情况, 读者不难将这些讨论变为对 (2.6.1) 及 (2.7.1) 的讨论.

这时要讨论的是下列这些方程:

$$\varphi \pm H\varphi = f, \quad (2.8.1)$$

其中 $f \in \mathcal{L}^*$ 已给, 在 \mathcal{L}^* 内求解 φ ;

$$A\varphi = f, \quad (2.8.2)$$

$$B\varphi = f, \quad (2.8.3)$$

$$B\varphi + sA\varphi = f \quad (s \neq 0), \quad (2.8.4)$$

$$h\varphi = f, \quad (2.8.5)$$

$$h\varphi + sA\varphi = f \quad (s \neq 0), \quad (2.8.6)$$

$$\varphi + B\varphi + rh\varphi - A\varphi = f, \quad (2.8.7)$$

$$\varphi + B\varphi + rh\varphi + sA\varphi = f \quad (s \neq -1), \quad (2.8.8)$$

在 (2.8.2) ~ (2.8.8) 诸方程中, 已给 $f \in \mathcal{L}$, 在 \mathcal{L} 内求解 φ .

解 (2.8.1)

如果方程 (2.8.1) 在 \mathcal{L}^* 内有解, 以算子 $I \mp H$ 作用之, 知必须

$$(I \mp H)f = 0. \quad (2.8.9)$$

当 f 满足 (2.8.9) 时, 任取 $\psi \in \mathcal{L}^*$, 则

$$\varphi = \frac{1}{2}f + (I \mp H)\psi$$

必为(2.8.1)的解,

解(2.8.2)

如果方程(2.8.2)有解,必须 $f=c$ 为常数;当 $f=c$ 时,任取 $\psi \in \mathcal{L}$,则

$$\varphi = c + h\psi + B\psi$$

必为(2.8.2)的解.

解(2.8.3)

如果方程(2.8.3)有解,必须

$$hf=0, f+Bf=0, \quad (2.8.10)$$

当 f 满足(2.8.10)时,任取 $v \in \mathcal{B}$, $\psi \in \mathcal{L}$,则

$$\varphi = -f + v + h\psi$$

必为(2.8.3)的解.

解(2.8.4)

如果方程(2.8.4)有解,必须

$$hf=0, \quad (2.8.11)$$

当 f 满足(2.8.11)时,任取 $\psi \in \mathcal{L}$,则

$$\varphi = \frac{1}{s} f + \frac{1+s}{s} Bf + h\psi$$

必为(2.8.4)的解.

解(2.8.5)

如果方程(2.8.5)有解,必须

$$Af=0, Bf=0. \quad (2.8.12)$$

当 f 满足(2.8.12)时,任取 $\psi \in \mathcal{L}$,则

$$\varphi = -hf + B\psi$$

必为(2.8.5)的解.

解(2.8.6)

如果方程(2.8.6)有解,必须 $f \in \mathcal{B}$,当 $f \in \mathcal{B}$ 时,任取 $\psi \in \mathcal{L}$,
则

$$\varphi = -hf + \frac{1}{s} Af + B\psi$$

必为(2.8.6)的解.

解(2.8.7)

如果方程(2.8.7)有解, 必须 $f \in \mathscr{B}$, 当 $f \in \mathscr{B}$ 时, 任取 $\psi \in \mathscr{L}$, 则

$$\varphi = \frac{1}{1+r^2} f - \frac{r}{1+r^2} hf + \frac{r^2}{1+r^2} Af + B\psi$$

必为(2.8.7)的解.

解(2.8.8)

如果方程(2.8.8)有解, 必须 $f \in \mathscr{B}$, 当 $f \in \mathscr{B}$ 时, 任取 $\psi \in \mathscr{L}$, 则

$$\varphi = \frac{1}{1+r^2} f - \frac{r}{1+r^2} hf + \frac{r^2-s}{(1+r^2)(1+s)} Af + B\psi$$

必为(2.8.8)的解.

总之, 上述诸方程如果有解, 解都不是唯一的. 在以后几节所讨论的方程和方程组中, 也要出现一些例外情形, 将不再赘述.

§ 2.9 有 B-核和 h-核的奇异积分方程(续)

本节讨论比(2.6.1)、(2.7.1)更为一般的方程. 首先讨论方程

$$pV + \tau h_\gamma V + KV = W, \quad (2.9.1)$$

其中 p, τ 为实数, 已给 $W \in \mathscr{B}$, $KV = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} V(u) K(v, u) \dot{u}$,

核 $K(v, u)$ 是对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件的实值函数. 我们有

定理 2.9.1 如果在 \mathscr{B} 中求解, 则方程(2.9.1)可以化成与之等价的 Fredholm 方程.

证 由于 $h_\gamma = h$, 故(2.9.1)等价于

$$pV + rhV + KV = W, \quad (2.9.2)$$

故只要讨论方程(2.9.2)即可.

$$\text{以算子} \quad M = pI - rh$$

作用于(2.9.2), 利用(2.5.19), 得到

$$p_1V + K_1V = W_1, \quad (2.9.3)$$

$$\text{其中} \quad p_1 = p^2 + r^2, \quad W_1 = (pI - rh)W \in \mathcal{B},$$

$$K_1V = -r^2AV + (pI - rh)KV$$

$$= \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} V(u) K_1(v, u) \dot{u}.$$

应用 § 2.6 中同样的推理, 易知 $K_1(v, u)$ 对于 v, u 皆满足 Lipschitz 条件, 所以(2.9.3)是 Fredholm 方程.

方程(2.9.3)与(2.9.1)的等价性是显然的, 因为以算子

$$M^* = pI + rh$$

作用于(2.9.3), 立得(2.9.1).

再考虑方程

$$p_1\varphi + q_1B_n\varphi + r_1h_{\gamma_1}\varphi + K\varphi = f, \quad (2.9.4)$$

其中 p_1, q_1, r_1 为实数, 已给 $f \in \mathcal{L}$, $K\varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) K(v, u) \dot{u}$, 核 $K(v, u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件, 显然(2.7.1)是(2.9.4)的一个特殊情形.

为了讨论方便, 不妨将(2.9.4)改写为

$$p_1\varphi + q_1B_n\varphi + r_1h_{\gamma_1}\varphi + s_1A\varphi + K_1\varphi = f, \quad (2.9.5)$$

其中 $K_1\varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) K_1(v, u) \dot{u}$, $K_1(v, u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件.

如同 § 2.7 中那样, (2.9.4), (2.9.5)等价于

$$p\varphi + qB\varphi + rh\varphi + K\varphi = f \quad (2.9.6)$$

及

$$p\varphi + qB\varphi + rh\varphi + sA\varphi + K_1\varphi = f, \quad (2.9.7)$$

这里 p, q, r, s 由(2.7.3)定义.

定理 2.9.2 如果在方程 (2.9.7) 中, $p-q \neq 0$, $p+s \neq 0$, $p^2+r^2 \neq 0$, 并且在 \mathcal{L} 内求解 φ , 则方程 (2.9.7) 可以化成与之等价的 Fredholm 方程.

证 用 (2.7.4) 所示的算子 M 作用于 (2.9.7), 得到方程

$$\varphi + K_2 \varphi = g, \quad (2.9.8)$$

其中 $g = Mf$, $K_2 \varphi = MK_1 \varphi = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}=1} \varphi(u) K_2(v, u) \dot{u}$, 易知 $K_2(v, u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件. 所以 (2.9.8) 是 Fredholm 方程. 用算子

$$L = pI + qB + rh + sA$$

作用于 (2.9.8), 立得 (2.9.7), 所以 (2.9.8) 与 (2.9.7) 等价.

与定理 2.9.2 等价的是

定理 2.9.3 如果在方程 (2.9.5) 中,

$$\begin{aligned} p_1 &\neq 2(1-a)q_1, \quad p_1 - (1-2a)q_1 + s_1 \neq 0, \\ (p_1 - (1-2a)q_1)^2 + r_1^2 &\neq 0, \end{aligned}$$

并在 \mathcal{L} 内求解 φ , 则方程 (2.9.5) 可以化为与之等价的 Fredholm 方程.

§ 2.10 有 Cauchy 核的奇异积分方程组

考虑方程组

$$P_1 \varphi + H_1 Q_1 \varphi + K \varphi = f, \quad (2.10.1)$$

其中 P_1, Q_1 皆为 m 阶复数方阵, 已给

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^* \quad (\text{指每个 } f_i \in \mathcal{L}^*, i=1, 2, \dots, m),$$

$$K = (K_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad K_{ij} \varphi_j = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}=1} \varphi_j(u) K_{ij}(v, u) \dot{u}.$$

每个核 $K_{ij}(v, u)$ 皆对 v, u 满足 Lipschitz 条件.

由(2.5.32), 方程(2.10.1)等价于

$$\left[P_1 + \frac{1}{2}(1-2c)Q_1 \right] \varphi + H Q_1 \varphi + K \varphi = f,$$

这里 \circ 由 § 2.6 中所定义. 记

$$P_1 + \frac{1}{2}(1-2c)Q_1 = P, \quad Q_1 = Q,$$

则(2.10.1)等价于

$$P\varphi + H Q \varphi + K \varphi = f. \quad (2.10.2)$$

我们有

定理 2.10.1 如果在方程(2.10.2)中, P, Q 满足

$$\det \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & P \end{pmatrix} \neq 0,$$

并且在 \mathcal{L}^* 内求解 $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$, 则方程组(2.10.2)可以化为与之等价的 Fredholm 方程组.

证 记

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R & S \\ S & R \end{pmatrix}.$$

用算子

$$M = RI + SH$$

作用于(2.10.2), 得到

$$\varphi + K_1 \varphi = F, \quad (2.10.3)$$

其中 $F = Mf \in \mathcal{L}^*$, $K_1 \varphi = M K \varphi$, $K_1 = (K_{ij}^{(1)})_{1 \leq i, j \leq m}$. 易知

$$K_{ij}^{(1)} \varphi_j = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}=1} \varphi_j(u) K_{ij}^{(1)}(v, u) \dot{u}$$

的核 $K_{ij}^{(1)}(v, u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件, 所以(2.10.3)是 Fredholm 方程组. 用算子 $PI + QH$ 作用于(2.10.3), 立得(2.10.2), 所以(2.10.3)与(2.10.2)等价.

与定理 2.10.1 等价的是

定理 2.10.2 如果在方程组(2.10.1)中, P_1, Q_1 满足

$$\det \begin{pmatrix} P_1 + \frac{1}{2}(1-2c)Q_1, & Q_1 \\ Q_1, & P_1 + \frac{1}{2}(1-2c)Q_1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

并且在 \mathcal{L}^* 内求解 $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$, 则方程 (2.10.1) 可化成与之等价的 Fredholm 方程组.

§ 2.11 有 B-核与 h-核的奇异积分方程组

考虑方程组

$$L\varphi = P_1\varphi + B_{\gamma}Q_1\varphi + h_{\gamma}R_1\varphi + AS_1\varphi = f, \quad (2.11.1)$$

其中 P_1, Q_1, R_1, S_1 皆为 m 阶实数方阵. 已给 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$, 在 \mathcal{L} 内求解 φ .

由 (2.5.30) 及 (2.5.31), 方程 (2.11.1) 等价于

$$P\varphi + BQ\varphi + hR\varphi + AS\varphi = f, \quad (2.11.2)$$

这里

$$P = P_1 - (1-2a)Q_1, \quad Q = Q_1, \quad R = R_1, \quad S = S_1.$$

假设

$$\det(P-Q) \neq 0, \quad \det \begin{pmatrix} P & R \\ -R & P \end{pmatrix} \neq 0,$$

(i) 如果 $\det(P+S) \neq 0$, 令

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} P_2 & Q_2 \\ -R_2 & P_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P & R \\ -R & P \end{pmatrix}^{-1}, \\ Q_2 &= (R_2R - P_2Q)(P-Q)^{-1}, \\ S_2 &= -(P_2S + R_2R)(P+S)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11.3)$$

则算子

$$M = P_2I + Q_2B + R_2h + S_2A \quad (2.11.4)$$

是算子

$$L = PI + QB + Rh + SA$$

的左逆, 即

$$ML = I,$$

因之, 方程 (2.11.2) 在这时有唯一解

$$\varphi = Mf. \quad (2.11.5)$$

(ii) 如果 $\det(P+S)=0$, 用算子 B 作用于 (2.11.2), 得到 $B((P-Q)\varphi - f) = 0$, 即

$$\varphi = (P-Q)^{-1}(f+U) = g+V, \quad (2.11.6)$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{pmatrix} \in \mathscr{B}, \quad g = (P-Q^{-1})f, \quad V = (P-Q)^{-1}U \in \mathscr{B}.$$

将 (2.11.6) 代入 (2.11.2), 知 V 必须满足方程组

$$PV + hRV + ASV = F, \quad (2.11.7)$$

其中

$$F = -Qg - BQg - hRg - ASg \in \mathscr{B}.$$

令

$$M^* = P_2I + R_2h,$$

其中 P_2, R_2 满足 (2.11.3). 用 M^* 作用于 (2.11.7), 得

$$V + (P_2S + R_2R)AV = M^*F, \quad (2.11.8)$$

其中

$$\begin{aligned} M^*F = & -[(P_2Q - R_2R)I + P_2QR + (P_2R + R_2Q)h \\ & + (P_2S + R_2R)A]g. \end{aligned}$$

记 $AV = C^* = \begin{pmatrix} C_1^* \\ \vdots \\ C_m^* \end{pmatrix}$ 为一列实数, 以

$$V = M^*F - (P_2S + R_2R)C^* \quad (2.11.9)$$

代入 (2.11.7), 得到

$$\begin{aligned} & (P_2S + R_2R)[(I + P_2S + R_2R)C^* \\ & + (P_2Q + P_2S)(P-Q)^{-1}f] = 0. \end{aligned}$$

这就表示, 如果方程组 (2.11.8) 有解, 所与之 f 必须使得线性方程组

$$(P_2S + R_2R) [(I + P_2S + R_2R)x + (P_2Q + P_2S)(P - Q)^{-1}f] = 0 \quad (2.11.10)$$

有解, 其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ 为一组变元. 反之, 如果方程组 (2.11.10) 有解, 任取其一组解 $x = C^*$, 则由 (2.11.9) 所示之 V 必为 (2.11.7) 的解. 从而 (2.11.6) 是 (2.11.2) 的解. 方程组 (2.11.2) 的解的唯一性, 可如下得知: 即当 $f \equiv 0$ 时, 从 (2.11.8) 立知 V 为一组常数, 而且必须满足方程

$$(P_2S + R_2R)(I + P_2S + R_2R)V = 0.$$

于是得到

定理 2.11.1 在方程组 (2.11.2) 中, 如果, P, Q, R 满足

$$\det(P - Q) \neq 0, \quad \det \begin{pmatrix} P & R \\ -R & P \end{pmatrix} \neq 0,$$

那末

(i) 当 $\det(P + S) \neq 0$ 时, (2.11.2) 在 \mathcal{L} 内有唯一解, 解如 (2.11.5) 所示;

(ii) 若 $\det(P + S) = 0$, 则当且仅当所与之 f 使得线性方程组 (2.11.10) 有解时, (2.11.2) 在 \mathcal{L} 内有解, 解的形式为 $\varphi = (P - Q)^{-1}f + V$, 其中 V 如 (2.11.9) 所示, C^* 是 (2.11.10) 的任一组解.

对于方程组 (2.11.1) 也有同样的结论, 这时 P_1, Q_1, R_1 满足

$$\det(P_1 - 2(1 - \alpha)Q_1) \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} P_1 - (1 - 2\alpha)Q_1 & R_1 \\ -R_1 & P_1 - (1 - 2\alpha)Q_1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

以及 $\det(P_1 - (1 - 2\alpha)Q_1 + S_1) \neq 0$ 或 $= 0$.

最后, 考虑方程组

$$P_1\varphi + B_{\gamma_1}Q_1\varphi + h_{\gamma_1}R_1\varphi + AS_1\varphi + K\varphi = f, \quad (2.11.11)$$

其中 P_1, Q_1, R_1, S_1 皆为 m 阶实数方阵, 已给 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$,

$K = (K_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$, $K_{ij}\varphi_j = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi_j(u) K_{ij}(v, u) \dot{u}$, 每个 $K_{ij}(v, u)$ 皆对 v, u 满足 Lipschitz 条件.

由(2.5.30)及(2.5.31), 方程(2.11.11)等价于

$$P\varphi + BQ\varphi + hR\varphi + AS\varphi + K\varphi = f, \quad (2.11.12)$$

这里 $P = P_1 - (1-2\alpha)Q_1$, $Q = Q_1$, $R = R_1$, $S = S_1$.

我们有

定理 2.11.2 如果在 \mathcal{L} 内求解方程组(2.11.12), 则当 P, Q, R, S 满足

$$\det(P-Q) \neq 0, \det(P+S) \neq 0, \det \begin{pmatrix} P & R \\ -R & P \end{pmatrix} \neq 0$$

时, 可将方程组(2.11.12)化成与之等价的 Fredholm 方程组.

证 用(2.11.4)式所示的算子 M 作用于(2.11.12), 得到 Fredholm 方程组

$$\varphi + K^*\varphi = F, \quad (2.11.13)$$

其中 $K^* = MK = (K_{ij}^*)$, $K_{ij}^*\varphi_j = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi_j(u) K_{ij}^*(v, u) \dot{u}$ 的核 $K_{ij}^*(v, u)$ 对 v, u 皆满足 Lipschitz 条件 ($i, j = 1, 2, \dots, m$).

由于

$$\begin{aligned} \det(P_2 - Q_2) &= \det[P_2 - (R_2R - P_2Q)(P-Q)^{-1}] \\ &= \det(P-Q)^{-1} \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(P_2 + S_2) &= \det[P_2 - (P_2S + R_2R)(P+S)^{-1}] \\ &= \det(P+S)^{-1} \neq 0, \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} P_2 & R_2 \\ -R_2 & P_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} P & R \\ -R & P \end{pmatrix}^{-1} \neq 0,$$

所以同理可以作出 M 的左逆算子 M^* , 用 M^* 作用于(2.11.13), 得到(2.11.12), 所以(2.11.13)与(2.11.12)等价.

对于方程(2.11.11)也有同样的结果, 只是条件成为

$$\det(P_1 - 2(1-a)Q_1) \neq 0, \det(P_1 - (1-2a)Q_1 + S_1) \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} P_1 - (1-2a)Q_1, & R_1 \\ -R_1, & P_1 - (1-2a)Q_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

系 2.11.1 如果在 \mathcal{L} 内求解方程

$$P\varphi + BQ\varphi + hR\varphi + K\varphi = f, \quad (2.11.14)$$

其中 P, Q, R 为 m 阶实数方阵, 且满足

$$\det(P-Q) \neq 0, \det \begin{pmatrix} P & R \\ -R & P \end{pmatrix} \neq 0,$$

而
$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathcal{L}, K = (K_{ij})_{1 \leq i, j \leq m},$$

$$K_{ij}\varphi_j = \omega_{2n-1}^{-1} \int_{u\bar{u}=1} \varphi_j(u) K_{ij}(v, u) \dot{u},$$

$K_{ij}(v, u)$ 皆对 v, u 满足 Lipschitz 条件, 则可将方程组 (2.11.14) 化成与之等价的 Fredholm 方程.

事实上, 只要将 (2.11.14) 改写成

$$P\varphi + BQ\varphi + hR\varphi + AS\varphi + K_1\varphi = f,$$

这里 $K_1 = K - AS$, 若 K 满足系 2.11.1 中的条件, 则 K_1 也满足, 选取 S , 使 $\det(P+S) \neq 0$, 这是一定能做到的. 于是由定理 2.11.2, 立知系中结论正确.

同样, 对于方程组

$$P_1\varphi + B_1Q_1\varphi + h_1R_1\varphi + K\varphi = f, \quad (2.11.15)$$

其中 P_1, Q_1, R_1 为 m 阶实数方阵, 且满足

$$\det(P_1 - 2(1-a)Q_1) \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} P_1 - (1-2a)Q_1, & R_1 \\ -R_1, & P_1 - (1-2a)Q_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

f, K 均满足系 2.11.1 中的条件, 则方程组 (2.11.15) 可化成与之

等价的 Fredholm 方程组.

最后, 还要指出四点:

(1) 注意到 H_γ , h_γ 与 B_γ 之间的关系, 我们可以将含有 Cauchy 核的常系数奇异积分方程及方程组归化为含有 B -核和 h -核的常系数的奇异积分方程组.

(2) 如果我们把 \mathcal{L}^* 及 \mathcal{L} 看作为定义在特征为零的域上的线性空间, \mathcal{B} 为 \mathcal{L} 的线性子空间, 在 \mathcal{L}^* 及 \mathcal{L} 上引进线性算子 H_γ , B_γ , h_γ , A , I , K , 且满足 § 2.5 中的种种关系式, 那末从 § 2.6~§ 2.11 的这些结果都可以理解为这样一般的线性空间上的结果, 只要我们对线性算子 K 作些必要的要求与说明.

(3) 如果我们不是用 (2.2.1) 及 (2.2.3) 所定义的 Cauchy 主值, 而用 § 1.8 中所定义的 Cauchy 主值, 那末上述这一套奇异积分方程的理论一样能建立起来, 或是更一般地, 将 (2.2.1) 及 (2.2.3) 及 § 1.8 中所定义的 Cauchy 主值放在同一个奇异积分方程或方程组内, 那末上述这些结果都可以得到相应的结果. 如果我们还用另外的办法定义 Cauchy 主值, 那末这些理论也可按这个 Cauchy 主值来进行.

(4) 从 § 2.6~§ 2.11 中可以看出, 解含有 H_γ , B_γ 及 h_γ 的积分方程及积分方程组时, 总是将它归化为等价的含有 H , B 及 h 的积分方程及积分方程组来讨论. 当然, 我们也可以利用 § 2.5 中一些有关 H_γ , B_γ , h_γ 的复合公式, 直接来解含有 H_γ , B_γ 及 h_γ 的积分方程及积分方程组.

§ 2.12 复超球面上变系数的奇异积分方程

前面所讨论的是复超球面上常系数的奇异积分方程, 这些结果, 均可推广到变系数的奇异积分方程上去.

复超球面上含 Cauchy 核的变系数的奇异积分方程的形式为

$$S\varphi \equiv a(v)\varphi(v) + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) k_0(v, u) H(v, \bar{u}) \dot{u} = f(v), \quad (2.12.1)$$

其中 $H(v, \bar{u}) = (1 - v\bar{u}')^{-n}$ 为 Cauchy 核, $a(v)$, $f(v)$, $k_0(v, u)$ 皆属于 \mathcal{L}^* . (2.12.1) 中的积分取 Cauchy 主值

$$\text{v. p.} \int_{u\bar{u}'=1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon}}.$$

当然, 我们可以讨论更一般的 Cauchy 主值, 例如用 § 1.6 ~ § 1.8 中所定义的 Cauchy 主值, 但正如在 § 2.6 ~ § 2.11 中所进行的那样, 含有这些 Cauchy 主值的奇异积分方程, 还是可以归化到如同 (2.12.1) 的形式. 同样, 含有 B-核及 h-核的变系数的奇异积分方程的形式为

$$\begin{aligned} a(v)\varphi(v) + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) k_1(v, u) B(v, u) \dot{u} \\ + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) k_2(v, u) h(v, u) \dot{u} = f(v), \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

其中 $B(v, u) = H(v, \bar{u}) + H(u, \bar{v}) - 1$,

$$h(v, u) = \frac{1}{v} (H(v, \bar{u}) - H(u, \bar{v}))$$

为 B-核与 h-核, $a(v)$, $f(v)$, $k_1(v, u)$ 和 $k_2(v, u)$ 皆属于 \mathcal{L} .

(2.12.2) 中的积分均取 Cauchy 主值. $\text{v. p.} \int_{u\bar{u}'=1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon}}.$

当然我们可以讨论更一般的 Cauchy 主值, 例如我们可以讨论

$$\begin{aligned} a(v)\varphi(v) + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) k_1(v, u) B(v, u) \dot{u} \\ + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(\gamma_1)} \varphi(u) k_2(v, u) h(v, u) \dot{u} = f(v). \end{aligned}$$

如同前面所指出的, 这可以归化成 (2.12.2) 的形式, 所以在这一章的以后部分, 我们所讨论的 Cauchy 主值都是

$$\text{v. p.} \int_{u\bar{u}'=1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon}}$$

这样定义的, 而这样定义的 Cauchy 主值的结果, 不难推广到更一般的 Cauchy 主值上去.

为了讨论变系数的奇异积分方程(2.12.1)及(2.12.2), 我们需要以下一些引理.

引理 2.12.1 设 $f(u)$ 为 $u\bar{u}'=1$ 上连续函数, 且为某一解析函数的边界值, $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$, 则

$$\begin{aligned} F(v, w; f) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n f(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n} \\ &= f(v) - f(w). \end{aligned} \quad (2.12.3)$$

特别有

$$F(v, w; 1) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n} = 0. \quad (2.12.4)$$

这里(2.12.3)及(2.12.4)中的积分定义为 $\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon_1 \\ |1-u\bar{w}'| > \varepsilon_2}}$.

证 由定义知当 $v=w$ 时, (2.12.3)显然成立, 所以只讨论 $v \neq w$ 的情形.

取 $0 < \rho < 1$, $0 < r < 1$, 则由定义,

$$\begin{aligned} F(v, w; f) &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma_\varepsilon(v, u) \cap \Sigma_\varepsilon(w, u)} \frac{(1-\rho v \bar{r} \bar{w}')^n f(u) \dot{u}}{(1-\rho v \bar{u}')^n (1-u \bar{r} \bar{w}')^n} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{u\bar{u}'=1} - \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} - \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w, u)} \right) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} (F_0 - F_1 - F_2), \end{aligned} \quad (2.12.5)$$

这里 $\Sigma_\varepsilon(v, u)$ 与 $\sigma_\varepsilon(v, u)$ 分别表示 $\{u | u\bar{u}'=1, |1-v\bar{u}'| > \varepsilon\}$ 及

$$\{u | u\bar{u}' = 1, |1 - v\bar{u}'| < \varepsilon\}.$$

利用 Cauchy 公式, 得

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} F_0 = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} 2f(\rho v) = 2f(v).$$

再看 F_1 的极限值, 无妨设已取

$$\varepsilon_1 \leq \frac{1}{8} |1 - v\bar{u}'|^2.$$

这时在 $\sigma_\varepsilon(v, u)$ 上,

$$\begin{aligned} |1 - u\bar{u}'| &\geq |1 - v\bar{u}'| - \sqrt{2} |1 - v\bar{u}'|^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2} |1 - v\bar{u}'|, \end{aligned} \quad (2.12.6)$$

于是

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} F_1 \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{(1 - \rho v\bar{u}')^n (f(u) - f(v)) \dot{u}}{(1 - u\bar{u}')^n (1 - \rho v\bar{u}')^n} \\ &\quad + f(v) \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{(1 - \rho v\bar{u}')^n \dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^n (1 - \rho v\bar{u}')^n} \\ &= F_{11} + F_{12}. \end{aligned}$$

由 (2.12.6) 及 $|1 - \rho v\bar{u}'| \geq \frac{1}{2} |1 - v\bar{u}'|$, 即得

$$F_{11} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} O\left(\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1 - v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 0.$$

关于 F_{12} , 我们有

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{(1 - \rho v\bar{u}')^n \dot{u}}{(1 - u\bar{u}')^n (1 - \rho v\bar{u}')^n} \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \left(\frac{1}{(1 - u\bar{u}')^n} - \frac{1}{(1 - v\bar{u}')^n} \right) \frac{(1 - \rho v\bar{u}')^n \dot{u}}{(1 - \rho v\bar{u}')^n} \\ &\quad + \frac{(1 - \rho v\bar{u}')^n}{(1 - v\bar{u}')^n} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{(1 - \rho v\bar{u}')^n} \end{aligned}$$

$$= T_1 + T_2, \quad (2.12.7)$$

显然 $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} T_2 = 1$; 另一方面, 由 (2.12.6) 可知在 $\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)$ 上,

$$\left| \frac{1}{(1 - u\bar{u}')^n} - \frac{1}{(1 - v\bar{v}')^n} \right| \leq \frac{M |(u-v)\bar{w}'|}{|1 - v\bar{w}'|^{n+1}}$$

(M 为正的常数).

因而

$$|T_1| \leq \frac{M |1 - \rho v \bar{w}'|^n}{|1 - v \bar{w}'|^{n+1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{|(u-v)\bar{w}'| \dot{u}}{|1 - \rho v \bar{w}'|^n}.$$

由 Lebesgue 定理,

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} T_1 = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} O \left(\int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1 - v \bar{w}'|^{n-\frac{1}{2}}} \right) = 0.$$

代入 (2.12.7), 即得

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} F_1 = F_{12} = f(v).$$

同理可得

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} F_2 = f(w).$$

综合上述所得, 即得 (2.12.3).

引理 2.12.2 设 $v\bar{v}' = 1$, $w\bar{w}' = 1$, 记

$$\tilde{F}(v, w; 1) \equiv \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1 - v\bar{w}')^n \dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^n (1 - w\bar{u}')^n},$$

其定义为

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma_{\varepsilon_1}(v, u) \cap \Sigma_{\varepsilon_2}(w, u)},$$

则

$$\tilde{F}(v, w; 1) = \begin{cases} 0, & \text{若 } w = v; \\ 2(1 - v\bar{w}')^n - \frac{(1 - v\bar{w}')^n}{(1 - w\bar{v}')^n} - 1, & \text{若 } w \neq v. \end{cases}$$

证 $w = v$ 时, 这是显然的. 若 $w \neq v$, 且 w 与 v 已任意固定.

取 $0 < \rho < 1$, $0 < r < 1$, 则

$$\begin{aligned}
& \tilde{F}(v, w; 1) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\Sigma_{\varepsilon_1}(v, u) \cap \Sigma_{\varepsilon_2}(w, u)} \frac{(1 - \rho r v \bar{w}')^n \dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n (1 - r w \bar{u}')^n} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{u \bar{u}' = 1} - \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} - \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w, u)} \right) \\
&= I_0 - I_1 - I_2.
\end{aligned}$$

易知 $I_0 = 2(1 - v \bar{w}')^n$. 另一方面, 设

$$\varepsilon_1 \leq \frac{1}{8} |1 - v \bar{w}'|^2, \quad \varepsilon_2 \leq \frac{1}{8} |1 - v \bar{w}'|^2,$$

这时在 $\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)$ 上, $|1 - u \bar{w}'| \geq \frac{1}{2} |1 - v \bar{w}'|$, 在 $\sigma_{\varepsilon_2}(w, u)$ 上, $|1 - v \bar{u}'| \geq \frac{1}{2} |1 - v \bar{w}'|$, 于是

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \\
&\quad \cdot \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \left(\frac{1}{(1 - w \bar{u}')^n} - \frac{1}{(1 - w \bar{v}')^n} \right) \frac{(1 - \rho v \bar{w}')^n \dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n} \\
&\quad + \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{(1 - \rho v \bar{w}')^n}{(1 - w \bar{v}')^n} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n} \\
&= I_{11} + I_{12}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \\
&\quad \cdot \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w, u)} \left(\frac{1}{(1 - v \bar{u}')^n} - \frac{1}{(1 - v \bar{w}')^n} \right) \frac{(1 - r v \bar{w}')^n \dot{u}}{(1 - r w \bar{u}')^n} \\
&\quad + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1 - r v \bar{w}')^n}{(1 - v \bar{w}')^n} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w, u)} \frac{\dot{u}}{(1 - r w \bar{u}')^n} \\
&= I_{21} + I_{22}.
\end{aligned}$$

与引理 2.12.1 的证明相仿, 可得

$$I_{11}=0, I_{12}=\frac{(1-v\bar{w}')^n}{(1-w\bar{v}')^n}, I_{21}=0, I_{22}=1,$$

将这些值代入, 即得引理.

由 B, h 的定义, 利用引理 2.12.1 及 2.12.2, 可导出

引理 2.12.3 若 $v\bar{v}'=1, w\bar{w}'=1$, 且 $v \neq w$, 则有

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} B(v, u) B(u, w) \dot{u} = -B(v, w),$$

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) h(u, w) \dot{u} = 1 - B(v, w)$$

和
$$\int_{u\bar{u}'=1} B(v, u) h(u, w) \dot{u} = 0.$$

引理 2.12.4 若 $v\bar{v}'=1, \gamma > 0, 0 \leq \rho < 1$,

$$Q_\rho(v) = \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\operatorname{Re}(1-v\bar{u}'))^\gamma \dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^m |1-\rho v\bar{u}'|^{n+1}},$$

当 $\gamma-1 < m < n-1+\gamma$;

$$R_\rho(v) = \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\operatorname{Re}(1-v\bar{u}'))^\gamma \dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^m |1-\rho v\bar{u}'|^n},$$

当 $\max(1, \gamma) < m < n+\gamma$.

则必存在与 ρ 和 v 无关的正数 M 及 N , 使得

$$Q_\rho(v) \leq \frac{M}{(1-\rho)^{m+1-\gamma}}, \quad (2.12.8)$$

$$R_\rho(v) \leq \frac{N}{(1-\rho)^{m-\gamma}}. \quad (2.12.9)$$

证 先证 (2.12.8). 利用酉变换, 可知

$$\begin{aligned} Q_\rho(v) &= \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\operatorname{Re}(1-u_1))^\gamma \dot{u}}{|1-u_1|^m |1-\rho u_1|^{n+1}} \\ &= \int_{\Sigma_\varepsilon(e_1, u)} + \int_{O_\varepsilon(e_1, u)} = Q_1 + Q_2, \end{aligned}$$

此处 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 显然有 $Q_1 = O(1)$. 以下估计 Q_2 , 记 $u_k = x_k + iy_k$, $k=1, 2, \dots, n$. 取球坐标: $x_1 = \cos \theta_1$, $y_1 = \sin \theta_1 \cos \theta_2$, \dots , $y_n =$

$\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{2n-1}$, 在 $\sigma_s(e_1, u)$ 上, 有

$$\varepsilon^2 \geq |1 - u_1|^2 \geq (1 - \cos \theta_1)^2 > \frac{4\theta_1^4}{\pi^4}.$$

所以

$$Q_2 = O \left(\int_0^{\pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} d\theta_1 \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \theta_1)^\gamma \sin^{2n-2} \theta_1 \sin^{2n-2} \theta_2 d\theta_2}{\left\{ \begin{aligned} &[(1 - \cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2]^{\frac{m}{2}} \\ &\cdot [(1 - \rho \cos \theta_1)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2]^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned} \right\}} \right)$$

记 $1 - \cos \theta_1 = a$, $\sin \theta_1 = b$, 令 $\cos \theta_2 = t$, 则上式右边为

$$\begin{aligned} & O \left(\int_0^{\pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{b^{2n-2} d\theta_1}{a^{m-\gamma} (1 - \rho \cos \theta_1)^{n+1}} \right. \\ & \quad \cdot \left. \int_0^1 \frac{dt}{\left[1 + \left(\frac{bt}{a}\right)^2\right]^{\frac{m}{2}} \left[1 + \left(\frac{\rho bt}{1 - \rho \cos \theta_1}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{2}}} \right) \\ & = O \left(\int_0^{\pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{b^{2n-2} d\theta_1}{a^{m-\gamma} (1 - \rho \cos \theta_1)^{n+1}} \right. \\ & \quad \cdot \left. \int_0^1 \frac{dt}{\left[1 + \left(\frac{\rho bt}{1 - \rho \cos \theta_1}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

令 $\frac{\rho bt}{1 - \rho \cos \theta_1} = S$, 可知

$$Q_2 = O \left(\int_0^{\pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin^{2n-2} \theta_1 d\theta_1}{(1 - \cos \theta_1)^{m-\gamma} (1 - \rho \cos \theta_1)^n} \right).$$

再令

$$r^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} = x,$$

其中

$$r = \frac{1 - \rho}{1 + \rho},$$

则 $\gamma - 1 < m < n - 1 + \gamma$ 时, 有

$$Q_2 = O \left(\frac{1}{r^{m+1-\gamma}} \int_0^\infty \frac{x^{2n-2m-3+2\gamma} dx}{(1+x^2)^n} \right)$$

$$= O\left(\frac{1}{(1-\rho)^{m+1-\gamma}}\right) \quad (\rho \rightarrow 1),$$

于是(2.12.8)得证.

再证(2.12.9). 与前同理, 有

$$R_\rho(v) = \int_{S_\rho(c_1, u)} + \int_{\sigma_\rho(\theta_1, u)} = R_1 + R_2.$$

当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 显然有 $R_1 = O(1)$. 而同样可得

$$R_2 = O\left(\int_0^\pi \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{b^{2n-2} d\theta_1}{a^{m-\gamma} (1-\rho \cos \theta_1)^n} \int_0^1 \frac{dt}{\left[1 + \left(\frac{bt}{a}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}}\right).$$

令 $\frac{bt}{a} = S$. 因 $m > 1$, 故有

$$R_2 = O\left(\int_0^\pi \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^{2n-3} \theta_1 d\theta_1}{(1-\cos \theta_1)^{m-1-\gamma} (1-\rho \cos \theta_1)^n}\right).$$

再令 $r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} = x$,

其中 $r = \frac{1-\rho}{1+\rho}$,

则当 $\gamma < m < n + \gamma$ 时, 有

$$\begin{aligned} R_2 &= O\left(\frac{1}{r^{m-\gamma}} \int_0^\infty \frac{x^{2n-2m-1+2\gamma} dx}{(1+x^2)^n}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{(1-\rho)^{m-\gamma}}\right) \quad (\rho \rightarrow 1). \end{aligned}$$

这便证明了(2.12.9).

引理 2.12.5 设 $\varphi(u, w) \in \operatorname{Lip} \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, 令

$$\begin{aligned} \psi(\rho v, w) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho v w')^n \varphi(u, w) \dot{u}}{(1-\rho v \bar{u}')^n (1-u \bar{w}')^n} \\ &\quad (v \bar{v}' = 1, 0 < \rho < 1), \end{aligned}$$

上式积分是取 Cauchy 主值, 记

$$\psi^+(v, w) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \psi(\rho v, w),$$

则

$$\psi^+(v, w) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n \varphi(u, w) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n} + \varphi(v, w). \quad (2.12.10)$$

上式右端积分的意义为 $\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon_1 \\ |1-u\bar{w}'| > \varepsilon_2}} \cdot$

证 先证 $v \neq w$ 的情形, 显然有

$$\begin{aligned} \psi^+(v, w) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \\ &\cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{((1-\rho v\bar{w}')^n - (1-\rho v\bar{u}')^n (\varphi(u, w) - \varphi(v, w))) \dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n} \\ &+ \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) \dot{u}}{(1-u\bar{w}')^n} \\ &+ \varphi(v, w) \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho u\bar{w}')^n \dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 1} L_1(\rho) + L_2 + L_3. \end{aligned}$$

由第一章中超球的 Cauchy 积分公式及 Cauchy 型积分的极限值公式, 可算得

$$\frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n} = \frac{1}{(1-\rho w\bar{v}')^n}.$$

因而 $L_3 = \varphi(v, w)$. 关于 $\lim_{\rho \rightarrow 1} L_1(\rho)$: 由

$$|1-\rho v\bar{u}'| \geq \frac{1}{2} |1-v\bar{u}'|$$

可知, $L_1(\rho)$ 的被积函数的绝对值在 $\rho \rightarrow 1$ 的过程中对 u 一致地小于 $u\bar{u}'=1$ 上的可积函数

$$\frac{M}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}} |1-u\bar{w}'|^{n-\frac{1}{2}}} \quad (M \text{ 为正的常数}).$$

由 Lebesgue 定理,

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} L_1(\rho) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{((1-v\bar{w}')^n - (1-v\bar{u}')^n)(\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-uw')^n}.$$

于是

$$\begin{aligned} \psi^+(v, w) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \\ &\cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{((1-v\bar{w}')^n - (1-v\bar{u}')^n)(\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-uw')^n} \\ &+ \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1-uw')^n} + \varphi(v, w). \end{aligned}$$

由引理 2.12.1, 上式即为(2.12.10).

再证 $v=w$ 的情形, 这只须证明

$$\psi^+(v, v) = \varphi(v, v).$$

由于

$$\begin{aligned} \psi(\rho v, v) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho)^n(\varphi(u, v) - \varphi(v, v))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{v}')^n} \\ &+ \varphi(v, v) \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho)^n\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-u\bar{v}')^n} \\ &= Q_1 + Q_2. \end{aligned}$$

显然有 $Q_2 = \varphi(v, v)$. 当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 有

$$Q_1 = O\left((1-\rho)^n \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\operatorname{Re}(1-v\bar{u}')^{\frac{\alpha}{2}})\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^n |1-\rho v\bar{u}'|^n}\right).$$

由(2.12.9) (在(2.12.9)中取 $m=n$, $\gamma=\frac{\alpha}{2}$), 即得

$$Q_1 = O((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}).$$

从而(2.12.10)得证.

引理 2.12.6 设 $\varphi(u, w) \in \operatorname{Lip} \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, 令

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\rho v, w) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho v\bar{w}')^n \varphi(u, w)\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n} \\ &\quad (0 < \rho < 1), \end{aligned}$$

上式积分取 Cauchy 主值, 记

$$\tilde{\psi}^+(v, w) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \tilde{\psi}(\rho v, w),$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^+(v, w) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n (\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-w\bar{u}')^n} \\ &\quad + [2(1-v\bar{w}')^n - 1] \varphi(v, w). \end{aligned} \quad (2.12.11)$$

证 先证 $v \neq w$ 的情形, 显然有

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\rho v, w) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \\ &\quad \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{((1-\rho v\bar{w}')^n - (1-\rho v\bar{u}')^n) (\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) \dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n (1-w\bar{u}')^n} \\ &\quad + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) \dot{u}}{(1-w\bar{u}')^n} \\ &\quad + \varphi(v, w) \tilde{F}(\rho v, w; 1), \end{aligned} \quad (2.12.12)$$

其中
$$\tilde{F}(\rho v, w; 1) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho v\bar{w}')^n \dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n (1-w\bar{u}')^n},$$

上式中积分是取 Cauchy 主值. 取 $0 < r < 1$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1} \tilde{F}(\rho v, w; 1) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{2(1-\rho r v\bar{w}')^n}{\omega_{2n-1}} \\ &\quad \cdot \left[\int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n (1-r w\bar{u}')^n} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\sigma_s(w, u)} \left(\frac{1}{(1-\rho v\bar{u}')^n} - \frac{1}{(1-\rho v\bar{w}')^n} \right) \frac{\dot{u}}{(1-r w\bar{u}')^n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(1-\rho v\bar{w}')^n} \int_{\sigma_s(w, u)} \frac{\dot{u}}{(1-r w\bar{u}')^n} \right] \\ &= J_0 - J_1 - J_2. \end{aligned}$$

与引理 2.12.1 的证明同理, 可算出

$$J_0 = 2(1-v\bar{w}')^n, \quad J_1 = 0, \quad J_2 = 1.$$

所以
$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \tilde{F}(\rho v, w; 1) = 2(1-v\bar{w}')^n - 1.$$

在 (2.12.12) 中令 $\rho \rightarrow 1$, 由 Lebesgue 定理, 并将上式代入, 使得

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^+(v, w) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \\ &\cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{((1-v\bar{w}')^n - (1-v\bar{u}')^n)(\varphi(u, w) - \varphi(v, \bar{w}))\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n} \\ &+ \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1-w\bar{u}')^n} \\ &+ [2(1-v\bar{w}')^n - 1]\varphi(v, w).\end{aligned}$$

利用引理 2.12.2, 不难变上式为

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^+(v, w) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n \varphi(u, w)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n} \\ &+ \varphi(v, w) \frac{(1-v\bar{w}')^n}{(1-w\bar{v}')^n},\end{aligned}$$

即 (2.12.11).

再证 $v=w$ 的情形. 要证明

$$\hat{\psi}^+(v, v) = -\varphi(v, v).$$

证法与引理 2.12.5 的证明的后半部分一样, 只须注意到

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho)^n \dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-v\bar{u}')^n} = -1$$

即可.

引理 2.12.7 设 $\varphi(u) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \rho < 1$, $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$, 记

$$S(\rho v, w) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho v\bar{w}')^n (\varphi(u) - \varphi(w))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-w\bar{u}')^n},$$

则存在与 v 及 w 无关的正数 K_1 , K_2 与 K , 使当 $v \neq w$ 时, 有估计式

$$|S(\rho v, w)| \leq K_1 |1 - \rho v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{2}} + K_2 \frac{|1 - \rho v\bar{w}'|^n}{|1 - v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}. \quad (2.12.13)$$

当 $v=w$ 时, 有估计式

$$|S(\rho v, v)| \leq K(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (2.12.14)$$

证 当 $v=w$ 时,

$$|S(\rho v, w)| \leq K_0(1-\rho)^n \int_{u\bar{w}=1} \frac{(\operatorname{Re}(1-v\bar{u}'))^{\frac{\alpha}{2}} \dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^n |1-\rho v\bar{u}'|^n},$$

其中 K_0 为正的常数. 在 (2.12.9) 中令 $m=n, \gamma=\frac{\alpha}{2}$, 得 (2.12.14).

再考虑 $v \neq w$ 的情形. 显然只需讨论 $|1-v\bar{w}'|$ 很小的情形.

取 $\varepsilon = 2\sqrt{2} |1-v\bar{w}'|^{\frac{1}{2}}$, 而

$$S(\rho v, w) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{\Sigma_\varepsilon(v, u)} + \int_{\sigma_\varepsilon(v, u)} \right) = I_1 + I_2.$$

因为 $|1-v\bar{w}'| \leq 2|1-\rho v\bar{u}'|$, 并因在 $\Sigma_\varepsilon(v, u)$ 上,

$$|1-u\bar{w}'| \geq \sqrt{2} |1-v\bar{w}'|^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq M_1 \frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{\frac{n-\alpha}{2}}} \int_{\Sigma_\varepsilon(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^n} \\ &\leq M_2 \frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

上式中的 M_1 与 M_2 皆为正的常数. 下面的 M_3 至 M_{18} 皆为正的常数, 不另声明.

取 $\delta = \frac{1}{16} |1-v\bar{w}'|$, 而

$$I_2 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{\sigma_\varepsilon(v, u) - \sigma_\delta(v, u)} + \int_{\sigma_\delta(v, u)} \right) = J_1 + J_2.$$

因在 $\sigma_\varepsilon(v, u) - \sigma_\delta(v, u)$ 上有 $|1-\rho v\bar{u}'| \geq \frac{1}{32} |1-v\bar{w}'|$, 并因在 $\sigma_\varepsilon(v, u)$ 上有 $|1-u\bar{w}'| \leq \frac{3}{2} \varepsilon$, 所以

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq M_3 \frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^n} \int_{\sigma_{\varepsilon/16}(u, u)} \frac{\dot{u}}{|1-w\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq M_4 \frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{4}}}. \end{aligned}$$

取
$$\delta_1 = \frac{1}{8} |1 - v\bar{w}'|^2,$$

而
$$J_2 = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{\sigma_{\delta_1}(v, u)} + \int_{\sigma_{\delta}(v, u) - \sigma_{\delta_1}(v, u)} \right) = P_1 + P_2.$$

将 P_1 写成

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(1 - \rho v \bar{w}')^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\delta_1}(v, u)} \frac{(\varphi(u) - \varphi(v)) \dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n (1 - u \bar{w}')^n} \\ &\quad + \frac{(1 - \rho v \bar{w}')^n (\varphi(v) - \varphi(w))}{\omega_{2n-1}} \\ &\quad \cdot \int_{\sigma_{\delta_1}(v, u)} \frac{1}{(1 - \rho v \bar{u}')^n} \left(\frac{1}{(1 - u \bar{w}')^n} - \frac{1}{(1 - v \bar{w}')^n} \right) \dot{u} \\ &\quad + \frac{(1 - \rho v \bar{w}')^n (\varphi(v) - \varphi(w))}{\omega_{2n-1} (1 - v \bar{w}')^n} \int_{\sigma_{\delta_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n} \\ &= Q_1 + Q_2 + Q_3. \end{aligned}$$

因在 $\sigma_{\delta_1}(v, u)$ 上 $|1 - u \bar{w}'| \geq \frac{1}{2} |1 - v \bar{w}'|$, 所以

$$\begin{aligned} |Q_1| &\leq M_5 \frac{|1 - \rho v \bar{w}'|^n}{|1 - v \bar{w}'|^n} \int_{\sigma_{\delta_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1 - v \bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq M_6 \frac{|1 - \rho v \bar{w}'|^n}{|1 - v \bar{w}'|^{n-\alpha}}, \\ |Q_2| &\leq M_7 \frac{|1 - \rho v \bar{w}'|^n |1 - v \bar{w}'|^{\frac{\alpha}{2}}}{|1 - v \bar{w}'|^{n+1}} \int_{\sigma_{\delta_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1 - v \bar{u}'|^{n-\frac{1}{2}}} \\ &\leq M_8 \frac{|1 - \rho v \bar{w}'|^n}{|1 - v \bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

显然
$$\left| \int_{\sigma_{\delta_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n} \right| \leq O \quad (\text{常数}).$$

所以
$$|Q_3| \leq M_9 \frac{|1 - \rho v \bar{w}'|^n}{|1 - v \bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

因此
$$|P_1| \leq M_{10} \frac{|1 - \rho v \bar{w}'|^n}{|1 - v \bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

最后考虑 P_2 . 记 $\Omega = \sigma_\delta(v, u) - \sigma_{\delta_1}(v, u)$. 当

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{(1-\rho v\bar{w}')^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega} \frac{(\varphi(u) - \varphi(v)) \dot{u}}{(1-\bar{u}w')^n (1-\rho v\bar{u}')^n} \\ &\quad + \frac{(1-\rho v\bar{w}')^n (\varphi(v) - \varphi(w))}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}w')^n (1-\rho v\bar{u}')^n} \\ &= R_1 + R_2. \end{aligned}$$

$$\text{显然 } |R_1| \leq M_{11} |1-\rho v\bar{w}'|^n \int_{\Omega} \frac{\dot{u}}{|1-\bar{u}w'|^n |1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}.$$

用一酉变换, 同时将 v 与 w 分别变为 $v = e_1$ 与 $w = (w_1, w_2, \dots, 0)$

且 $w_2 = \sqrt{1-|w_1|^2} \geq 0$. 从而在 $\sigma_\delta(v, u)$ 上有

$$\begin{aligned} |1-\bar{u}w'| &\geq |1-w_1| - |w_1| |1-u_1| - |w_2| |u_2| \\ &\geq \frac{15}{16} |1-w_1| - 2\sqrt{(1-|w_1|)(1-|u_1|)} \\ &> \frac{1}{3} |1-w_1| = \frac{1}{3} |1-e_1\bar{w}'|. \end{aligned} \quad (2.12.15)$$

所以

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq 3^n M_{11} \left| \frac{1-\rho v\bar{w}'}{1-v\bar{w}'} \right|^n \int_{\sigma_\delta(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq M_{12} \frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

再看 R_2 , 由于 $\varphi(u) \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) 及 (2.12.15) 可得

$$|R_2| \leq M_{13} \frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \lambda(\delta_1, \delta), \quad (2.12.16)$$

$$\text{其中 } \lambda(\delta_1, \delta) = \int_{\Omega} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^n}.$$

无妨设 $v = e_1$, 取球坐标, 由 $\delta_1 \leq |1-u_1| \leq \delta$ 可知

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{2}} \leq \theta_1 \leq \pi \left(\frac{\delta}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$\lambda(\delta_1, \delta)$

$$\begin{aligned} &\leq M_{14} \int_{\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}}^{\pi(\frac{\delta}{2})^{\frac{1}{2}}} d\theta_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n-2}\theta_1 \sin^{2n-2}\theta_2 d\theta_2}{[(1-\cos\theta_1)^2 + \sin^2\theta_1 \cos^2\theta_2]^{\frac{n}{2}}} \\ &\leq M_{15} \int_{\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}}^{\pi(\frac{\delta}{2})^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin^{2n-2}\theta_1 d\theta_1}{(1-\cos\theta_1)^{n-1}} \\ &\leq M_{16} \int_{\frac{\delta_1}{\sqrt{2}}}^{\pi(\frac{\delta}{2})^{\frac{1}{2}}} \frac{d\theta_1}{\theta_1} \\ &= M_{16} \left(\log 2\pi + \frac{3}{2} \log |1-v\bar{w}'|^{-1} \right). \end{aligned}$$

将上式代入(2.12.16)中, 得到

$$|R_1| \leq M_{17} \frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \log |1-v\bar{w}'|^{-1}.$$

因此 $|P_2| \leq M_{18} \frac{|1-\rho v\bar{w}'|^n}{|1-v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} \log |1-v\bar{w}'|^{-1}.$

综上所述, 就证明了(2.12.13).

引理 2.12.8 设 $\varphi(u) \in \text{Lip } \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $v\bar{v}' = 1$, $w\bar{w}' = 1$, 记

$$\xi(v, w) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{u}')^n \varphi(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n}, \quad (2.12.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(v, w) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{u}')^n (\varphi(u) - \varphi(v)) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n}. \\ & \quad (2.12.18) \end{aligned}$$

在(2.12.17)中积分定义为

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon_1 \\ |1-u\bar{w}'| > \varepsilon_2}}$$

在(2.12.18)中积分定义为

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_{\Sigma_{\varepsilon_1}(v, u) \cap \Sigma_{\varepsilon_2}(w, u)}$$

则当 $|1 - v\bar{w}'| \rightarrow 0$ 时, 对 $v\bar{v}' = 1, w\bar{w}' = 1$ 上的 v 与 w , 一致地有

$$\xi(v, w) = O(|1 - v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}) \quad (2.12.19)$$

和

$$\tilde{\xi}(v, w) = O(|1 - v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}). \quad (2.12.20)$$

证 先证 (2.12.19). 取 $0 < \rho < 1, 0 < r < 1$, 有

$$\begin{aligned} \xi(v, w) &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{u\bar{u}'=1} - \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} - \int_{\sigma_{\varepsilon_2}(w, u)} \right) \\ &= T_0 - T_1 - T_2. \end{aligned}$$

对任意固定的 v 与 $w, v \neq w$, 无妨设 ε_1 与 ε_2 均小于 $\frac{1}{8} |1 - v\bar{w}'|^2$,

与引理 2.12.1 之证明同样道理, 可知

$$T_1 = T_{11} + T_{12} + T_{13},$$

其中

$$\begin{aligned} T_{11} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \\ &\quad \cdot \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{(1 - \rho v \bar{w}')^n (\varphi(u) - \varphi(v)) \dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n (1 - u \bar{w}')^n} = 0, \\ T_{12} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2\varphi(v)}{\omega_{2n-1}} \\ &\quad \cdot \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \left(\frac{1}{(1 - u \bar{w}')^n} - \frac{1}{(1 - v \bar{w}')^n} \right) \frac{(1 - \rho v \bar{w}')^n \dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n} \\ &= 0, \\ T_{13} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2\varphi(v)}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_{\varepsilon_1}(v, u)} \frac{\dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n} = \varphi(v). \end{aligned}$$

因而 $T_1 = \varphi(v)$. 同理 $T_2 = \varphi(w)$. 另一方面, 有

$$\begin{aligned} T_0 &= \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \\ &\quad \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1 - \rho v r \bar{w}')^n (2\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi(w)) \dot{u}}{(1 - \rho v \bar{u}')^n (1 - r u \bar{w}')^n} \\ &\quad + \varphi(v) + \varphi(w), \end{aligned}$$

所以

$$\xi(v, w) = \lim_{\rho \rightarrow 1} S(\rho v, w) + \lim_{r \rightarrow 1} T(v, rw), \quad (2.12.21)$$

其中 $S(\rho v, w)$ 如引理 2.12.7 中所定义, 而

$$T(v, rw) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-rv\bar{w}')^n (\varphi(u) - \varphi(v)) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-rw\bar{u}')^n}.$$

由(2.12.13), 立得

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} |S(\rho v, w)| \leq M |1 - v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}.$$

M 为一正的常数. 与证明引理 2.12.7 同理, 可得

$$\lim_{r \rightarrow 1} |T(v, rw)| \leq N |1 - v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}},$$

N 亦为一正的常数. 将上述二不等式代入(2.12.21), 并取 $K = 2\max(M, N)$, 即得, 对一切 $v\bar{v}'=1, w\bar{w}'=1$, 有

$$|\xi(v, w)| \leq K |1 - v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}.$$

于是(2.12.19)得证.

再来证(2.12.20). 与上面一样, 有

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(v, w) &= \lim_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ s_2 \rightarrow 0}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ r \rightarrow 1}} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{u\bar{u}'=1} - \int_{\sigma_{s_1}(v, u)} - \int_{\sigma_{s_2}(w, u)} \right) \\ &= \tilde{T}_0 - \tilde{T}_1 - \tilde{T}_2. \end{aligned}$$

可算出 $\tilde{T}_1=0, \tilde{T}_2=0$, 因而

$$\hat{\xi}(v, w) = \lim_{r \rightarrow 1} \tilde{T}(v, rw),$$

此处

$$\tilde{T}(v, rw) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-rv\bar{w}')^n (\varphi(u) - \varphi(v)) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-rw\bar{u}')^n}.$$

按照引理 2.12.7 的证法, 对 $\tilde{T}(u, rw)$ 可得到同样的估计式, 这样就可得到(2.12.20).

从引理 2.12.8 可立得

引理 2.12.9 设 $\varphi(u) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, 则当 $|1 - v\bar{w}'| \rightarrow 0$

时, 奇异积分

$$\begin{aligned} & \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u) - \varphi(v)) B(v, u) B(u, w) \dot{u}, \\ & \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u) - \varphi(v)) h(v, u) h(u, w) \dot{u} \\ \text{与} & \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) B(v, u) h(u, w) \dot{u}, \\ & \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) h(v, u) B(u, w) \dot{u} \end{aligned}$$

对 $v\bar{v}'=1, w\bar{w}'=1$ 的 v 与 w 均一致地为 $O(|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}-n})$.

§ 2.13 置 换 公 式

定理 2.13.1 设 $\varphi(u, w) \in \text{Lip } \alpha, 0 < \alpha \leq 1, \psi(\rho v, w)$ 与 $\psi^+(v, w)$ 以及 $\tilde{\psi}(\rho v, w)$ 与 $\tilde{\psi}^+(v, w)$ 分别由引理 2.12.5 及引理 2.12.6 中所定义, $0 < \rho < 1$. 则

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\psi(\rho v, w) - \psi^+(v, w)) \dot{w}}{(1 - \rho v \bar{w}')^n} = 0, \quad (2.13.1)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\tilde{\psi}(\rho v, w) - \tilde{\psi}^+(v, w)) \dot{w}}{(1 - \rho v \bar{w}')^n} = 0. \quad (2.13.2)$$

证 以下只证 (2.13.1), 至于 (2.13.2) 可同理证明之.

先证对任意固定的 $\delta > 0$, 当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 估计式

$$\frac{d\psi(\rho v, w)}{d\rho} = O((1 - \rho)^{\frac{\alpha}{2}-1}) \quad (2.13.3)$$

对所有适合 $v\bar{v}'=1, w\bar{w}'=1$ 及 $|1 - v\bar{w}'| \geq \delta$ 的 v 与 w 一致地成立.

事实上, 从

$$\psi(\rho v, w) = \frac{2}{\omega_{2n-1}}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{((1-\rho v\bar{w}')^n - (1-\rho v\bar{u}')^n)(\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n(1-\bar{u}\bar{w}')^n} \\ & + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1-\bar{u}\bar{w}')^n} + \varphi(v, w), \end{aligned}$$

可以算出

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\rho v, w)}{d\rho} &= \frac{2n}{\omega_{2n-1}} \\ & \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-\rho v\bar{w}')^{n-1} v \overline{(u-w)'} (\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1-\bar{u}\bar{w}')^n (1-\rho v\bar{u}')^{n+1}}. \end{aligned}$$

对已经给定的 $\delta > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{8} \delta^2$, 于是

$$\frac{d\psi(\rho v, w)}{d\rho} = \frac{2n}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{\Sigma_\delta(v, u)} + \int_{\sigma_\delta(v, u)} \right) = I_1 + I_2.$$

因在 $\Sigma_\delta(v, u)$ 上, 当 ρ 充分靠近 1 时, $|1-\rho v\bar{u}'| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, 所以存在一仅与 δ 及 $\varphi(u, w)$ 有关的正数 M_1 , 使得 $|I_1| \leq M_1$; 而在 $\sigma_\delta(v, u)$ 上, 因有 $|1-\bar{u}\bar{w}'| \geq \frac{\delta}{2}$, 所以存在一仅与 δ 及 $\varphi(u, w)$ 有关的正数 M_2 , 使得

$$|I_2| \leq M_2 \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\operatorname{Re}(1-v\bar{u}'))^{\frac{\alpha}{2}} \dot{u}}{|1-\rho v\bar{u}'|^{n+1}}.$$

由 (2.12.8), 取 $m=0$, $\gamma=\frac{\alpha}{2}$, 当 $1-\rho$ 充分小时, 有

$$|I_2| \leq M_3 ((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}-1}),$$

M_3 为正的常数, 因此 (2.13.3) 得证.

再证: 对任意固定的 $\delta > 0$, 存在一仅与 δ 及 $\varphi(u, w)$ 有关的正数 C , 使当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 估计式

$$|\psi(\rho v, w) - \psi^+(v, w)| \leq C(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (2.13.4)$$

对所有适合 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$, $|1-v\bar{w}'| \geq \delta$ 的 δ 与 w 一致地成立.

事实上, 对于 $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$, 显然有

$$\psi(\rho_2 v, w) - \psi(\rho_1 v, w) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\psi(\rho v, w).$$

由(2.13.3), 存在一仅与 δ 及 $\varphi(u, w)$ 有关的正数 M , 使当 $|1 - v\bar{w}'| \geq \delta$ 时, 恒有

$$|\psi(\rho_2 v, w) - \psi(\rho_1 v, w)| \leq M \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{(1 - \rho)^{1 - \frac{\alpha}{2}}}.$$

当 $\rho_2 \leq \frac{1 + \rho_1}{2}$ 时, $1 - \rho_2 \geq \rho_2 - \rho_1$, 于是

$$\begin{aligned} & |\psi(\rho_2 v, w) - \psi(\rho_1 v, w)| \\ & \leq \frac{M}{(1 - \rho_2)^{1 - \frac{\alpha}{2}}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \leq M (\rho_2 - \rho_1)^{\frac{\alpha}{2}}; \end{aligned}$$

当 $\rho_2 > \frac{1 + \rho_1}{2}$ 时, $1 - \rho_1 < 2(\rho_2 - \rho_1)$, 于是

$$\begin{aligned} & |\psi(\rho_2 v, w) - \psi(\rho_1 v, w)| \\ & \leq \frac{2M}{\alpha} [(1 - \rho_1)^{\frac{\alpha}{2}} - (1 - \rho_2)^{\frac{\alpha}{2}}] \\ & \leq \frac{2M}{\alpha} (1 - \rho)^{\frac{\alpha}{2}} < \frac{2^{1 + \frac{\alpha}{2}} M}{\alpha} (\rho_2 - \rho_1)^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

记 $O = \frac{2^{1 + \frac{\alpha}{2}} M}{\alpha}$, 则

$$|\psi(\rho_2 v, w) - \psi(\rho_1 v, w)| \leq O (\rho_2 - \rho_1)^{\frac{\alpha}{2}}$$

对所有适合 $v\bar{v}' = 1$, $w\bar{w}' = 1$, $|1 - v\bar{w}'| \geq \delta$ 的 v 与 w 一致地成立. 在上式中令 $\rho_2 \rightarrow 1$, 并改记 $\rho_1 = \rho$, 即得(2.13.4).

现在来证(2.13.1). 记

$$J(\rho) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\psi(\rho v, w) - \psi^+(v, w)) \dot{w}}{(1 - \rho v\bar{w}')^n}.$$

显然

$$|J(\rho)| \leq \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{|\psi(\rho v, w) - \psi^+(v, w)| \dot{w}}{|1 - \rho v\bar{w}'|^n}$$

$$= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \left(\int_{\Sigma_{\delta_1}(v, w)} + \int_{\sigma_{\delta_1}(v, w)} \right) \\ = J_1(\rho) + J_2(\rho).$$

先看 $J_2(\rho)$ 与 δ_1 的关系, $\psi^+(v, w)$ 已有表达式 (2.12.10), 而

$$\psi(\rho v, w) \\ = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{w}'=1} \frac{(1-\rho v\bar{w}')^n (\varphi(u, w) - \varphi(w, w)) \bar{u}}{(1-\rho v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n} \\ + \varphi(w, w).$$

若记 $\varphi(u, w) = \varphi(u)$, 并采用引理 2.12.7 及引理 2.12.8 的符号, 则得出

$$|\psi(\rho v, w) - \psi^+(v, w)| \\ \leq 2|S(\rho v, w)| + |\varphi(w) - \varphi(v)| \\ + |\xi(v, w)|.$$

由引理 2.12.7 与引理 2.12.8 知, 存在正的常数 M_1 、 M_2 与 M_3 , 对一切 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$, $v \neq w$ 的 v 与 w , 恒有

$$|\psi(\rho v, w) - \psi^+(v, w)| \\ \leq M_1 |1 - \rho v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}} + M_2 \frac{|1 - \rho v\bar{w}'|^n}{|1 - v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{2}}} + M_3 |1 - v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}},$$

将上式代入 $J_2(\rho)$ 中, 便有

$$J_2(\rho) \leq M_4 \int_{\sigma_{\delta_1}(v, w)} \frac{\bar{w}}{|1 - v\bar{w}'|^{n-\frac{\alpha}{4}}} \leq M_5 \delta_1^{\frac{\alpha}{4}},$$

其中 M_4 与 M_5 皆为正的常数.

于是, 任给 $\varepsilon > 0$, 可先取定一适合 $M_5 \delta_1^{\frac{\alpha}{4}} < \frac{\varepsilon}{2}$ 的正数 δ_1 , 即有

$$J_2(\rho) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 (2.13.4), 对于适合 $|1 - v\bar{w}'| \geq \delta_1$ 的 v 与 w , 必存在一仅与 δ_1 及 $\varphi(u, w)$ 有关的正数 C , 使得

$$J_1(\rho) \leq \frac{2C(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}}{\omega_{2n-1}} \int_{\mathbb{S}_1(v, w)} \frac{\dot{w}}{|1-v\bar{w}'|^n} \\ < \frac{2C(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}}{\delta_1^n}.$$

因此, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在一适合 $\frac{C\delta^{\frac{\alpha}{2}}}{\delta_1^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ 的 $\delta > 0$, 使当 $0 < 1-\rho < \delta$ 时, 有

$$J_1(\rho) < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而 $|J(\rho)| < \varepsilon$, 即 (2.13.1) 得证.

定理 2.13.2 (Poincaré-Bertrand 公式) 若 $\varphi(u, w) \in \mathcal{L}^*$, 则

$$\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} H(v, \bar{u}) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(u, w) H(u, \bar{w}) \dot{w} \\ = \varphi(v, v) + \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \dot{w} \\ \cdot \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(u, w) H(v, \bar{u}) H(u, \bar{w}) \dot{u}. \quad (2.13.5)$$

(2.13.5) 的左端的两层积分均取主值, 其右端的第二项亦可为

$$\left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} H(v, \bar{w}) \dot{w} \\ \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\varphi(u, w) H(v, \bar{u}) H(u, \bar{w})}{H(v, \bar{w})} \dot{u}, \quad (2.13.6)$$

它的内层积分的定义是

$$\int_{u\bar{u}'=1} \frac{\varphi(u, w) H(v, \bar{u}) H(u, \bar{w}) \dot{u}}{H(v, \bar{w})} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ |1-v\bar{u}'| > \varepsilon_1 \\ |1-u\bar{w}'| > \varepsilon_2}} \cdot \quad (2.13.7)$$

据引理 2.12.8, 若 $\varphi(u, w) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, 则当 $|1-v\bar{w}'|$

$\rightarrow 0$ 时, 积分 (2.13.7) 对 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$ 的 v 与 w 一致地为

$$O(|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}),$$

所以 (2.13.6) 的外层积分是一通常积分.

证 先在 $zz'<1$ 内构造两个函数

$$\Phi(z) = \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(u, w) \dot{w}}{(1-u\bar{w}')^n}$$

和

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\varphi(u, w) \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n}, \end{aligned}$$

上二式的二层积分均取主值.

任意固定 z , 命

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n} \left(\int_{\Sigma_\varepsilon(u, w)} + \int_{\sigma_\varepsilon(u, w)} \right) \\ &= \Phi_1 + \Phi_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \left(\int_{\Sigma_\varepsilon(w, u)} + \int_{\sigma_\varepsilon(w, u)} \right) \\ &= \Psi_1 + \Psi_2, \end{aligned}$$

其中 Φ_2 与 Ψ_2 的内层积分均取主值, 即

$$\text{v. p. } \int_{\sigma_\varepsilon} = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ (\delta < \varepsilon)}} \int_{\sigma_\varepsilon - \sigma_\delta}.$$

由 $\Phi_1 = \Psi_1$ 知

$$|\Phi - \Psi| \leq |\Phi_2| + |\Psi_2|.$$

注意到

$$\begin{aligned} |\Phi_2| &\leq \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{|1-z\bar{u}'|^n} \\ &\quad \cdot \left(\int_{\sigma_\varepsilon(u, w)} \frac{|\varphi(u, w) - \varphi(w, w)| \dot{w}}{|1-u\bar{w}'|^n} \right. \\ &\quad \left. + \left| \varphi(w, w) \int_{\sigma_\varepsilon(u, w)} \frac{\dot{w}}{(1-u\bar{w}')^n} \right| \right). \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$\int_{\sigma_\varepsilon(u, w)} \frac{|\varphi(u, w) - \varphi(w, w)| \dot{w}}{|1 - uw'|^n} = O(\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}),$$

并且

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{v. p.} \int_{\sigma_\varepsilon(u, w)} \frac{\dot{w}}{(1 - uw')^n} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ (\delta < \varepsilon)}} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 1 \\ (\rho < 1)}} \int_{\sigma_\varepsilon - \sigma_\delta} \frac{\dot{w}}{(1 - \rho uw')^n} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon = 0$. 同理 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon = 0$. 于是

$$\Phi(z) = \Psi(z).$$

因此, 若用 $\Phi^+(v)$ 与 $\Psi^+(v)$ 分别表示 $\Phi(z)$ 与 $\Psi(z)$ 当 $z = \rho v (0 < \rho < 1, v\bar{v}' = 1)$ 趋向 v 时的极限值, 则应有

$$\Phi^+(v) = \Psi^+(v). \quad (2.13.8)$$

由第一章 § 1.5 的结果, 知 $\int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(u, w)\dot{w}}{(1 - u\bar{w}')^n} \in \mathcal{L}^*$ 以及超球

的 Cauchy 型积分的极限值公式, 可得

$$\begin{aligned} \Phi^+(v) &= \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^n} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(u, w)\dot{w}}{(1 - u\bar{w}')^n} \\ &\quad + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(v, w)\dot{w}}{(1 - v\bar{w}')^n}. \end{aligned} \quad (2.13.9)$$

另一方面, 采用引理 2.12.5 中的记号, 有

$$\begin{aligned} \Psi(\rho v) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\psi(\rho v, w) - \psi^+(v, w))\dot{w}}{(1 - \rho v\bar{w}')^n} \\ &\quad + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\psi^+(v, w)\dot{w}}{(1 - \rho v\bar{w}')^n}. \end{aligned}$$

由定理 2.13.1 知, 当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 上式右端第一项的极限为零, 所以

$$\begin{aligned} \Psi^+(v) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\psi^+(v, w) - \psi^+(v, v))\dot{w}}{(1 - \rho v\bar{w}')^n} \\ &\quad + 2\psi^+(v, v). \end{aligned}$$

利用 $\Psi^+(v, w)$ 的表达式 (2.12.10) 及 (2.12.19) 知

$$\begin{aligned} & \psi^+(v, w) - \psi^+(v, v) \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n \psi(u, w) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-v\bar{w}')^n} + \varphi(v, w) - \varphi(v, v) \\ &= O(|1-v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}). \end{aligned}$$

并且上述估计对一切 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$ 的 v 与 w 一致地成立, 由 Lebesgue 定理, 得出

$$\begin{aligned} \Psi^+(v) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \\ &\quad \cdot \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\psi^+(v, w) - \psi^+(v, v)) \dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n} \\ &\quad + 2\psi^+(v, v). \end{aligned}$$

再以 (2.12.10) 代入, 即得

$$\begin{aligned} \Psi^+(v) &= \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n} \\ &\quad \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1-v\bar{w}')^n \varphi(u, w) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n (1-u\bar{w}')^n} \\ &\quad + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(v, w) \dot{w}}{(1-v\bar{w}')^n} + \varphi(v, v). \quad (2.13.10) \end{aligned}$$

比较 (2.13.8)、(2.13.9) 与 (2.13.10), 便证明了 (2.13.5).

定理 2.13.3 若 $\varphi(u, w) \in \mathcal{L}^*$, 则

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} H(v, \bar{u}) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(u, w) H(w, \bar{u}) \dot{w} \\ &= -\varphi(v, v) + \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \\ &\quad \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u, w) H(v, \bar{u}) H(w, \bar{u}) \dot{u}. \quad (2.13.11) \end{aligned}$$

上式右端亦可改写为

$$-\varphi(v, v) + \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) H(v, \bar{u}) H(w, \bar{u}) \dot{u} \\
& - \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(v, w) H(v, \bar{w}) \dot{w} \\
& - \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(v, w) H(w, \bar{v}) \dot{w} \\
& + \frac{4}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(v, w) \dot{w}. \tag{2.13.12}
\end{aligned}$$

由引理 2.12.8, (2.13.12) 的第二项的外层积分是一通常积分.

证 先在 $zz' < 1$ 内构造两个函数

$$\tilde{\Phi}(z) = \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(u, w) \dot{w}}{(1-w\bar{u}')^n}$$

和

$$\tilde{\Psi}(z) = \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\varphi(u, w) \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n (1-w\bar{u}')^n},$$

上二式内层积分均取主值.

与证明定理 2.13.2 中证明 $\Phi(z) = \psi(z)$ 同理, 可知 $\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Psi}(z)$. 所以若用 $\tilde{\Phi}^+(v)$ 与 $\tilde{\Psi}^+(v)$ 分别表示 $\tilde{\Phi}(z)$ 与 $\tilde{\Psi}(z)$ 当 $z = \rho v$ ($0 < \rho < 1, v\bar{v}' = 1$) 趋向 v 时的极限值, 则应有

$$\tilde{\Phi}^+(v) = \tilde{\Psi}^+(v). \tag{2.13.13}$$

显然

$$\begin{aligned}
& \tilde{\Phi}(v) \\
& = \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^n} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(u, w) \dot{w}}{(1-w\bar{u}')^n} \\
& + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(v, w) \dot{w}}{(1-w\bar{v}')^n}. \tag{2.13.14}
\end{aligned}$$

另一方面, 采用引理 2.12.6 中的符号, 有

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(\rho v) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\tilde{\psi}(\rho v, w) - \tilde{\psi}^+(v, w)) \dot{w}}{(1-\rho v\bar{w}')^n} \\
&+ \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\tilde{\psi}^+(v, w) \dot{w}}{(1-\rho v\bar{w}')^n}.
\end{aligned}$$

由定理 2.13.1,

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}^+(v) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\psi^+(v, w) - \psi^+(v, v))\dot{w}}{(1 - \rho v\bar{w}')^n} \\ &\quad + 2\tilde{\psi}(v, v).\end{aligned}$$

利用 $\tilde{\psi}^+(v, w)$ 的表达式 (2.12.11) 及 (2.12.18) 知

$$\begin{aligned}&\tilde{\psi}^+(v, w) - \tilde{\psi}^+(v, v) \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1 - v\bar{w}')^n (\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^n (1 - w\bar{u}')^n} \\ &\quad + 2(1 - v\bar{w}')^n \varphi(v, w) + \varphi(v, v) - \varphi(v, w) \\ &= O(|1 - v\bar{w}'|^{\frac{\alpha}{4}}).\end{aligned}$$

并且上述估计对一切 $v\bar{v}'=1$, $w\bar{w}'=1$ 上的 v 与 w 一致地成立, 由 Lebesgue 定理, 得到

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}^+(v) &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\tilde{\psi}^+(v, w) - \tilde{\psi}^+(v, v))\dot{w}}{(1 - v\bar{w}')^n} \\ &\quad + 2\tilde{\psi}^+(v, v).\end{aligned}$$

以 (2.12.11) 代入, 即得

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}^+(v) &= \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}}\right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(\varphi(u, w) - \varphi(v, w))\dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^n (1 - w\bar{u}')^n} \\ &\quad + \frac{4}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(v, w)\dot{w} - \varphi(v, v) \\ &\quad - \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(v, w)\dot{w}}{(1 - v\bar{w}')^n}.\end{aligned}\quad (2.13.15)$$

比较 (2.13.13)、(2.13.14)、(2.13.15), 便证明了 (2.13.12).

由引理 2.12.2, 即可将 (2.13.12) 改写为 (2.13.11).

由定理 2.13.2、定理 2.13.3 及引理 2.12.3, 可导出含 B-核与 h-核的下列置换公式. 即

定理 2.13.4 设 $\varphi(u, w) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(u, w) B(u, w) \dot{w} \\ &= \left(\frac{1}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u, w) B(v, u) B(u, w) \dot{u}. \end{aligned} \quad (2.13.16)$$

上式右边又可写为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \\ & \quad \cdot \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) B(v, u) B(u, w) \dot{u} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(v, w) B(v, w) \dot{w}. \end{aligned} \quad (2.13.17)$$

由引理 2.12.9, (2.13.17) 的第一项的外层积分是一通常积分.

定理 2.13.5 设 $\varphi(u, w) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(u, w) h(u, w) \dot{w} \\ &= -\varphi(v, v) + \left(\frac{1}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \\ & \quad \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u, w) h(v, u) h(u, w) \dot{u}. \end{aligned} \quad (2.13.18)$$

上式右边又可写为

$$\begin{aligned} & -\varphi(v, v) + \left(\frac{1}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \\ & \quad \cdot \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) h(v, u) h(u, w) \dot{u} \\ & \quad + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(v, w) \dot{w} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(v, w) B(v, w) \dot{w}. \end{aligned} \quad (2.13.19)$$

由引理 2.12.9, (2.13.19) 第二项的外层积分是一通常积分.

定理 2.13.6 设 $\varphi(u, w) \in \mathcal{L}$, 则

$$\begin{aligned} & \int_{u\bar{u}'=1} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(u, w) h(u, w) \dot{w} \\ &= \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u, w) B(v, u) h(u, w) \dot{u}, \end{aligned} \quad (2.13.20)$$

上式右边又可写为

$$\int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) B(v, u) h(u, w) \dot{u}, \quad (2.13.21)$$

$$\begin{aligned} & \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi(u, w) B(u, w) \dot{w} \\ &= \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u, w) h(v, u) B(u, w) \dot{u}. \end{aligned} \quad (2.13.22)$$

上式右边又可写为

$$\int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u, w) - \varphi(v, w)) h(v, u) B(u, w) \dot{u}. \quad (2.13.23)$$

由引理 2.12.9, (2.13.21) 与 (2.13.23) 的外层积分皆为通常积分.

由公式 (2.13.5)、(2.13.16)、(2.13.18)、(2.13.20) 与 (2.13.22), 立得超球面上奇异积分与弱奇性积分合成的下列结果. 即

系 2.13.1 设 $k_0(u, w) \in \mathcal{L}^*$, 并且

$$k(u, w) = (k_0(u, w) - k_0(u, u)) H(u, \bar{w}),$$

则

$$\begin{aligned} & \int_{u\bar{u}'=1} H(v, \bar{u}) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} k(u, w) \dot{w} \\ &= \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} H(v, \bar{u}) k(u, w) \dot{u}. \end{aligned}$$

系 2.13.2 设 $k_1(u, w)$ 与 $k_2(u, w)$ 均属于 \mathcal{L} , 并且

$$k(u, w) = (k_1(u, w) - k_1(u, v))B(u, w) \\ + (k_2(u, w) - k_2(u, v))h(u, w),$$

则

$$\begin{aligned} & \int_{u\bar{u}'=1} B(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} k(u, w) \dot{w} \\ &= \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} B(v, u) k(u, w) \dot{u}, \\ & \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} k(u, w) \dot{w} \\ &= \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \int_{u\bar{u}'=1} h(v, u) k(u, w) \dot{u}. \end{aligned}$$

\mathcal{L}^* 中为 $z\bar{z}' < 1$ 内某解析函数的边界值的函数的全体记作 \mathcal{A} .

由 (2.13.5) 及 (2.12.3) 可得

系 2.13.3 若 $f(u) \in \mathcal{A}$, $\varphi(w) \in \mathcal{L}^*$, 则

$$H(fH\varphi) = f\varphi + fH\varphi - H(f\varphi),$$

这里 H 由 (2.5.1) 定义, 特别取 $f \equiv 1$, 即得 (2.5.15), $H^2\varphi = \varphi$.

由 (2.13.17)、(2.13.19)、(2.13.21) 及 (2.13.23), 取 $\varphi(u, w) = \varphi(w)$, 即得 (2.5.17)、(2.5.19)、(2.5.26); 若 $\varphi(w) \in \mathcal{L}$, 则 $B^2\varphi = -B\varphi$, $h^2\varphi = -\varphi - B\varphi + A\varphi$, $Bh\varphi = 0$, $hB\varphi = 0$.

§ 2.14 正 则 化

定理 2.14.1 设核 $k(v, u)$ 与 $l(v, u)$ 满足

$$|k(v, u)| \leq \frac{M}{|1 - v\bar{u}'|^\lambda}, \quad |l(v, u)| \leq \frac{N}{|1 - v\bar{u}'|^\mu}, \quad (2.14.1)$$

其中 M 与 N 为正的常数, $0 \leq \lambda$, $\mu < n$, $u\bar{u}' = 1$, $v\bar{v}' = 1$, 又设

$$I(v, w) = \int_{u\bar{u}'=1} k(v, u) l(u, w) \dot{u}, \quad (2.14.2)$$

则有估计式

$$I(v, w) = \begin{cases} C, & \text{当 } \lambda + \mu < n, \\ \frac{C}{|1 - v\bar{w}'|^{\lambda - \frac{n-\mu}{2}}}, & \text{当 } \lambda + \mu \geq n \text{ 且 } \lambda \leq \mu, \\ \frac{C}{|1 - v\bar{w}'|^{\mu - \frac{n-\lambda}{2}}}, & \text{当 } \lambda + \mu \geq n \text{ 且 } \lambda \geq \mu, \end{cases} \quad (2.14.3)$$

C 为一正的常数.

证 $\lambda + \mu < n$ 时结论显然, 以下证明 (2.14.3) 的第二式 (同理可证第三式).

考虑 $v \neq w$ 且 v 与 w 已任意固定, 显然只需讨论 $|1 - v\bar{w}'|$ 很小的情形.

由 (2.14.1) 与 (2.14.2) 知

$$\begin{aligned} |I(v, w)| &\leq MN \int_{u\bar{w}'=1} \frac{\dot{u}}{|1 - v\bar{u}'|^{\lambda} |1 - u\bar{w}'|^{\mu}} \\ &= MN \left(\int_{\Sigma_\varepsilon(v, u)} + \int_{\sigma_\varepsilon(v, u)} \right) = MN(I_1 + I_2). \end{aligned}$$

取 $\varepsilon = 2\sqrt{2}|1 - v\bar{w}'|^{\frac{1}{2}}$, 于是

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C_1}{|1 - v\bar{w}'|^{\frac{\lambda}{2}}} \int_{\Sigma_\varepsilon(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1 - u\bar{w}'|^{\mu}} \\ &\leq \frac{C_2}{|1 - v\bar{w}'|^{\frac{\lambda}{2}}} \leq \frac{C_3}{|1 - v\bar{w}'|^{\lambda - \frac{n-\mu}{2}}}. \end{aligned}$$

其中 C_1 与 C_2 为正的常数 (以下 C_3 至 C_6 也皆为正的常数).

取 $\delta = \frac{1}{16}|1 - v\bar{w}'|$, 写

$$I_2 = \int_{\sigma_\varepsilon(v, u) - \sigma_\delta(v, u)} + \int_{\sigma_\delta(v, u)} = J_1 + J_2,$$

因在 $\sigma_\delta(v, u)$ 上, $|1 - u\bar{w}'| \leq \frac{3}{2}\varepsilon$, 所以

$$\begin{aligned}
 J_1 &\leq \frac{C_3}{|1-v\bar{w}'|^\lambda} \int_{\sigma_{\delta/2}(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1-w\bar{u}'|^\mu} \\
 &\leq \frac{C_4}{|1-v\bar{w}'|^{\lambda-\frac{n-\mu}{2}}}.
 \end{aligned}$$

因在 $\sigma_\delta(v, u)$ 上, $|1-w\bar{u}'| > \frac{1}{3}|1-v\bar{w}'|$ (见 (2.12.15)), 所以

$$\begin{aligned}
 J_2 &< \frac{C_5}{|1-v\bar{w}'|^\mu} \int_{\sigma_\delta(v, u)} \frac{\dot{u}}{|1-v\bar{u}'|^\lambda} \\
 &\leq \frac{C_6}{|1-v\bar{w}'|^{\mu-(n-\lambda)}} < \frac{C_6}{|1-v\bar{w}'|^{\lambda-\frac{n-\mu}{2}}}.
 \end{aligned}$$

综合上述, 即得 (2.14.3) 第二式.

下面是关于正则化的两条主要定理, 它们是对方程 (2.12.1) 及 (2.12.2) 进行定性研究的基础.

定理 2.14.2 改写方程 (2.12.1) 为

$$S\varphi \equiv a\varphi + bH\varphi + K\varphi = f, \quad (2.14.4)$$

其中 $a(v)$, $b(v) = k_0(v, v)$ 和 $f(v)$ 皆属于 \mathcal{L}^* ,

$$K\varphi = \int_{u\bar{v}=1} \varphi(u) k(v, u) \dot{u},$$

它的核

$$k(v, u) = \frac{2}{\omega_{2n-1}} (k_0(v, u) - k_0(v, v)) H(v, \bar{u}), \quad k_0(v, u) \in \mathcal{L}^*. \quad (2.14.5)$$

如果 (2.14.4) 中的 a 与 b 在复超球面上恒有 $a^2 - b^2 \neq 0$, 则可将 (2.14.4) 化成 Fredholm 型方程.

证 引进算子 T :

$$T\psi \equiv \frac{1}{a^2 b^2} (a\psi - bH\psi), \quad \psi \in \mathcal{L}^*. \quad (2.14.6)$$

可以证明: T 是 (2.14.4) 的左正则化算子. 事实上, 用 T 从左边作用到 (2.14.4) 两端之后, (2.14.4) 的右端即为 $Tf = g$, 而其左端

变为

$$TS\varphi = \frac{1}{a^2 b^2} (a^2 \varphi + abH\varphi + aK\varphi - bH(a\varphi) - bH(bH\varphi) - bHK\varphi).$$

应用公式(2.13.5)于 $H(bH\varphi)$, 再应用系 2.13.1 于 $HK\varphi$, 于是(2.14.4)化成了

$$TS\varphi = \varphi + L\varphi = g, \quad (2.14.7)$$

其中 $L\varphi = \int_{w\bar{w}=1} \varphi(u) l(v, u) \dot{u}$, 它的核

$$\begin{aligned} l(v, u) = & \frac{1}{a^2(v) - b^2(v)} \left\{ a(v)k(v, u) \right. \\ & - \frac{2b(v)(a(u) - a(v))}{\omega_{2n-1}(1 - v\bar{u}')^n} \\ & - \frac{2b(v)}{\omega_{2n-1}(1 - v\bar{u}')^n} \int_{w\bar{w}=1} \frac{(1 - w\bar{u}')^n b(w) \dot{w}}{(1 - v\bar{w}')^n (1 - w\bar{u}')^n} \\ & \left. - \frac{2b(v)}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}=1} \frac{k(w, u) \dot{w}}{(1 - v\bar{w}')^n} \right\}. \end{aligned}$$

由引理 2.12.8 知

$$|l(v, u)| \leq \frac{M}{|1 - v\bar{u}'|^{n-\alpha_1}} \quad (2.14.8)$$

其中 M 为正的常数, $0 < \alpha_1 < 1$, 即方程(2.14.7)是弱奇性的.

由定理 2.14.1, 可知(2.14.7)是 Fredholm 型方程, 对此只需指出关键的一点, 即方程(2.14.7)的核 $l(v, u)$ 从某一个叠核以后的一切叠核都是有界函数(由此可以断言(2.14.7)适合积分方程论的 Fredholm 诸定理, 即(2.14.7)是一 Fredholm 型方程, 参阅 Михлин[1] § 10). 事实上, 由定理 2.14.1 和(2.14.8), 对于 $l(v, u)$ 的 p 次叠核 $l^{(p)}(v, u)$ 显然有如下估计:

$$|l^{(p)}(v, u)| \leq \frac{M_p}{|1 - v\bar{u}'|^{n-\alpha_1 - \frac{p\alpha_1}{2}}},$$

其中 M_p 为正的常数. 于是对于适合

$$p \geq \frac{2}{\alpha_1}(n - \alpha_1)$$

的所有 $k^{(p)}(v, u)$ 都是有界函数, 定理证毕.

定理 2.14.3 改写 (2.12.2) 为

$$S\varphi \equiv a\varphi + bB\varphi + ch\varphi + K\varphi = f, \quad (2.14.9)$$

其中 $a(v)$, $b(v) = k_1(v, v)$, $c(v) = k_2(v, v)$ 和 $f(v)$ 皆属于 \mathcal{L} ,

$K\varphi = \int_{uu'=1} \varphi(u) k(v, u) \dot{u}$, 它的核

$$\begin{aligned} k(v, u) = & \frac{1}{\omega_{2n-1}} [(k_1(v, u) - k_1(v, v))B(v, u) \\ & + (k_2(v, u) - k_2(v, v))h(v, u)], \end{aligned} \quad (2.14.10)$$

$k_1(v, u)$ 与 $k_2(v, u)$ 皆属于 \mathcal{L} . 如果 (2.14.9) 中的 a, b 与 c 在复超球面上恒适合 $(a-b)(a^2+c^2) \neq 0$, 则可将 (2.14.9) 化为 Fredholm 型方程.

证 引进算子 T :

$$T\psi \equiv a\psi + \beta B\psi + \gamma h\psi, \quad \psi \in \mathcal{L}, \quad (2.14.11)$$

其中

$$\alpha = \frac{a}{a^2+c^2}, \quad \beta = -\frac{ab+c^2}{(a-b)(a^2+c^2)}, \quad \gamma = -\frac{c}{a^2+c^2}. \quad (2.14.12)$$

可以证明: T 是 (2.14.9) 的左正则化算子. 事实上, 用 T 从左边作用到 (2.14.9) 两端后, 应用公式 (2.13.17)、(2.13.19)、(2.13.21) 和 (2.13.23), 以及推论 2.13.2, 方程 (2.14.9) 即变为

$$TS\varphi \equiv \varphi + L\varphi = g, \quad (2.14.13)$$

此处 $g = Tf$, $L\varphi = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{uu'=1} \varphi(u) l(v, u) \dot{u}$, 它的核

$$\begin{aligned} l(v, u) = & \gamma(v)C(v) + (a(u) - a(v)) \\ & \cdot [\beta(v)B(v, u) + \gamma(v)h(v, u)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{w\bar{w}'=1} k(w, u) [\beta(v)B(v, w) + \gamma(v)h(v, w)] \dot{w} \\
& + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} (b(w) - b(v)) \\
& \quad \cdot [\beta(v)B(v, w) + \gamma(v)h(v, w)] B(w, u) \dot{w} \\
& + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} (C(w) - C(v)) \\
& \quad \cdot [\beta(v)B(v, w) + \gamma(v)h(v, w)] h(w, u) \dot{w}.
\end{aligned}$$

由引理 2.12.9 知

$$|l(v, u)| \leq \frac{M}{|1 - v\bar{u}'|^{n-\alpha_1}},$$

其中 M 为一正数, $0 < \alpha_1 < 1$, 即方程 (2.14.13) 是弱奇性的, 与定理 2.14.2 的证明同理, (2.14.13) 是 Fredholm 型方程, 定理证毕.

§ 2.15 某些方程的直接求解

正则化是研究奇异积分方程的重要方法, 但一般说来, 利用正则化定理并不能得到方程的明确解答. 本节在于证明, 当方程 (2.12.1) 中的 $\alpha(v)$ 与 $k_0(v, u)$ 属于 \mathscr{A} 时, (2.12.1) 可以直接求解. $k_0(v, u) \in \mathscr{A}$ 是指 $k_0(v, u)$ 分别作为 v 和 u 的函数皆属于 \mathscr{A} , 由于多复变数解析函数的特点, 本节的结论对 $n=1$ 的情形 (见 Peters[1]) 不尽适用.

下面的两条定理, 是方程 (2.12.1) 直接求解的基础, 它们的证明分别与引理 2.12.1 和定理 2.13.2 相仿, 此处不赘.

定理 2.15.1 设 $f(v, u, w) \in \mathscr{L}^*$, 并且 $f(v, u, w)$ 作为 u 的函数属于 \mathscr{A} ; 则奇异积分

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{w}=1} \frac{f(v, u, w) H(v, \bar{u}) H(u, \bar{w}) \dot{u}}{H(v, \bar{w})} \\
& = f(v, v, w) - f(v, w, w).
\end{aligned} \tag{2.15.1}$$

定理 2.15.2 若 $\varphi_1(v, u)$ 与 $\varphi_2(v, u)$ 皆属于 \mathcal{L}^* , 则

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{u\bar{u}'=1} \varphi_1(v, u) H(v, \bar{u}) \dot{u} \int_{w\bar{w}'=1} \varphi_2(u, w) H(u, \bar{w}) \dot{w} \\ &= \varphi_1(v, v) \varphi_2(v, v) + \left(\frac{2}{\omega_{2n-1}} \right)^2 \int_{w\bar{w}'=1} \dot{w} \\ & \quad \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \varphi_1(v, u) \varphi_2(u, w) H(v, \bar{u}) H(u, \bar{w}) \dot{u}. \end{aligned} \quad (2.15.2)$$

关于方程 (2.12.1) 的直接求解, 主要结果是

定理 2.15.3 在方程 (2.12.1) 中, 若 $a(v)$ 与 $k_0(v, u)$ 皆属于 \mathcal{A} , 并且 $a^2(v) - b^2(v)$ 在 $v\bar{v}'=1$ 上恒不为零, 此处 $b(v) = k_0(v, v)$; 则方程 (2.12.1) 在 \mathcal{L}^* 内有唯一解

$$\varphi = Tf. \quad (2.15.3)$$

算子 T 的定义是: 若 $\varphi \in \mathcal{L}^*$,

$$\begin{aligned} Tf \equiv & \frac{a(v)\psi(v)}{a^2(v) - b^2(v)} - \frac{2}{\omega_{2n-1}(a(v) + b(v))} \\ & \cdot \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\psi(u) k_0(v, u) H(v, \bar{u}) \dot{u}}{a(u) - b(u)}. \end{aligned} \quad (2.15.4)$$

证 先指出一个事实, 即若 $f(u) \in \mathcal{A}$, 且 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上恒不为零, 则 $(f(u))^{-1} \in \mathcal{A}$. 这是因为, $f(u) \in \mathcal{A}$ 表明 $f(u)$ 是 $z\bar{z}' < 1$ 内的解析函数 $f(z)$ 的连续边界值, 并且 $f(u) \in \mathcal{L}^*$. 由 $f(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上恒不为零, 必存在一正数 $\rho < 1$, $f(z)$ 在 $\mathcal{D} = \{z | \rho < z\bar{z}' < 1\}$ 内恒不为零, 从而 $(f(z))^{-1}$ 在 \mathcal{D} 内解析. 于是由多复变数解析函数的连续性定理 (例如参阅多复变数的教科书), $(f(z))^{-1}$ 亦必在整个 $z\bar{z}' < 1$ 内解析. 因此, \mathcal{L}^* 内的函数 $(f(u))^{-1}$ 是 $z\bar{z}' < 1$ 内的解析函数 $(f(z))^{-1}$ 的连续边界值, 即 $(f(u))^{-1} \in \mathcal{A}$.

用 T 从左边作用于 (2.12.1) 的两端, 右端即成 Tf , 而左端为

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2(v)\varphi(v)}{a^2(v)-b^2(v)} + \frac{2a(v)}{\omega_{2n-1}(a^2(v)-b^2(v))} \\
& \cdot \int_{u\bar{u}=1} \varphi(u)k_0(v, u)H(v, \bar{u})\dot{u} - \frac{2}{\omega_{2n-1}(a(v)+b(v))} \\
& \cdot \int_{u\bar{u}=1} \frac{\varphi(u)a(u)k_0(v, u)H(v, \bar{u})\dot{u}}{a(u)-b(u)} \\
& - \frac{4}{\omega_{2n-1}^2(a(v)+b(v))} \int_{u\bar{u}=1} \frac{k_0(v, u)H(v, \bar{u})\dot{u}}{a(u)-b(u)} \\
& \cdot \int_{w\bar{w}=1} \varphi(w)k_0(u, w)H(u, \bar{w})\dot{w},
\end{aligned}$$

由假设知 $\frac{k_0(v, u)k_0(u, w)}{a(u)-b(u)} \in \mathcal{A}$, 利用定理 2.15.1 和定理 2.15.2, 上式末项即为

$$\begin{aligned}
& - \frac{b^2(v)\varphi(v)}{a^2(v)-b^2(v)} - \frac{2b(v)}{\omega_{2n-1}(a^2(v)-b^2(v))} \\
& \cdot \int_{u\bar{u}=1} \varphi(u)k_0(v, u)H(v, \bar{u})\dot{u} \\
& + \frac{2}{\omega_{2n-1}(a(v)+b(v))} \\
& \cdot \int_{u\bar{u}=1} \frac{\varphi(u)b(u)k_0(v, u)H(v, \bar{u})\dot{u}}{a(u)-b(u)}.
\end{aligned}$$

因而 (2.12.1) 的左端变成了 $\varphi(v)$.

再用 (2.12.1) 所示的 S 从左边作用于 (2.15.3) 式两端, 利用与上述同样的推理, 可知 (2.15.3) 是方程 (2.12.1) 在 \mathcal{L}^* 内的唯一解.

系 2.15.1 设 $k_0(v, u) \in \mathcal{A}$, 且 $k_0(v, v) \equiv 1$, 若记

$$S_0\varphi \equiv \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}=1} \varphi(u)k_0(v, u)H(v, \bar{u})\dot{u} \quad (\varphi \in \mathcal{L}^*), \quad (2.15.5)$$

则在 \mathcal{L}^* 上有

$$S_0^2 = I, \quad (2.15.6)$$

此处 I 为恒同算子: $I\varphi = \varphi$.

证 在(2.12.1)中取 $\alpha(v) \equiv 0$, 则 $S = S_0$, 而且此时(2.15.4)所示的 $T = S_0$, 由定理 2.15.3, $ST = TS = I$, 由此立得(2.15.6).

(2.15.6)可以看作反演公式 $H^2 = I$ 的推广. 因为若取 $k_0(v, u) \equiv 1$, 则 $S_0 = H$.

系 2.15.2 若 $b(u)$ 与 $c(u)$ 皆属于 \mathscr{A} , 则

(i) 方程

$$a\varphi + bH(c\varphi) = f \quad (2.15.7)$$

在 \mathscr{L}^* 内有唯一解

$$\varphi = \frac{af}{a^2 - b^2c^2} - \frac{b}{a + bc} H\left(\frac{cf}{a - bc}\right). \quad (2.15.8)$$

(ii) 在 \mathscr{L}^* 内, 方程

$$a\varphi + bH(c\varphi) + K\varphi = f \quad (2.15.9)$$

等价于一个 Fredholm 型方程, 此处 $K\varphi = \int_{u \in \mathscr{L}^*} \varphi(u) k(v, u) u$.

$k(v, u) \in \mathscr{L}^*$.

证 (i) 即定理(2.15.3)中取 $k_0(v, u) = \alpha(v)b(u)$ 的特殊情形, 以下证明(ii).

将方程(2.15.9)改写成

$$a\varphi + bH(c\varphi) = f_0, \quad (2.15.10)$$

并把

$$f_0 = f - K\varphi \in \mathscr{L}^* \quad (2.15.11)$$

视为已知函数, 于是由(i)知, (2.15.10)在 \mathscr{L}^* 内有唯一解

$$\varphi = T_1 f_0. \quad (2.15.12)$$

算子 T_1 的定义是

$$T_1\psi \equiv \frac{a\psi}{a^2 - b^2c^2} - \frac{b}{a + bc} H\left(\frac{c\psi}{a - bc}\right), \quad \psi \in \mathscr{L}^*.$$

再以(2.15.11)代入(2.15.12)中, 便得到一个 Fredholm 型方程

$$\varphi + L\varphi = g, \quad (2.15.13)$$

其中 $g = T_1 f$, 而

$$L\varphi \equiv \frac{a}{a^2 - b^2 c^2} K\varphi - \frac{b}{a + bc} H\left(\frac{c}{a - bc} K\varphi\right) \\ = \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) l(v, u) \dot{u},$$

由第一章知, $l(v, u) \in \mathcal{L}^*$.

方程(2.15.13)与(2.15.9)是等价的. 事实上, 可引进算子 S_1 :

$$S_1\psi \equiv a\psi + bH(c\psi) \quad (\psi \in \mathcal{L}^*),$$

用 S_1 从左边作用于(2.15.13)两端, 应用定理 2.15.1 和定理 2.15.2, 即得 2.15.9.

定理 2.15.3 表明 \mathcal{A} 是复超球面上的一个重要函数类, 为了刻画 \mathcal{A} , 先证

定理 2.15.4 设 $\varphi(u) \in \mathcal{L}^*$, 记

$$\Phi(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) H(z, \bar{u}) \dot{u} \quad (z\bar{z}' < 1), \quad (2.15.14)$$

$$\Phi^+(v) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) H(v, \bar{u}) \dot{u} + \frac{1}{2} \varphi(v) \quad (v\bar{v}' = 1), \quad (2.15.15)$$

则当 z 从 $z\bar{z}' < 1$ 内沿任一路径趋向 v 时, 恒有

$$\lim_{z \rightarrow v} \Phi(z) = \Phi^+(v).$$

更具体些, 若 $\varphi(u) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, 则对任一小于 α 的正数 δ , 存在一仅与 δ 及 $\varphi(u)$ 有关的正数 K , 使当超球的内点 z 在球面近旁时, 有估计式

$$|\Phi(z) - \Phi^+(v)| \leq K |1 - z\bar{v}'|^{\frac{\alpha-\delta}{2}}. \quad (2.15.16)$$

证 当 $0 < \rho < 1$ 且 $\rho \rightarrow 1$ 时, 估计式

$$\frac{d\Phi(\rho w)}{d\rho} = O((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}-1}) \quad (2.15.17)$$

对 $w\bar{w}' = 1$ 上的 w 一致地成立.

事实上, 由

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi(\rho w)}{d\rho} &= \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\varphi(u) w \bar{w}' u}{(1-\rho w \bar{u}')^{n+1}} \\ &= \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\varphi(u) - \varphi(w)) w \bar{u}' u}{(1-\rho w \bar{u}')^{n+1}}\end{aligned}$$

可知, 当 $\rho \rightarrow 1$ 时, 对 w 一致地有

$$\frac{d\Phi(\rho w)}{d\rho} = O\left(\int_{w\bar{w}'=1} \frac{(\operatorname{Re}(1-w\bar{u}'))^{\frac{\alpha}{2}} u}{|1-\rho w \bar{u}'|^{n+1}}\right).$$

在引理 2.12.4 中取 $m=0$, $\gamma=\frac{\alpha}{2}$, 利用 (2.12.8) 即可以从上式得到 (2.15.17).

与定理 2.13.1 证明中同样道理, 由第一章, 已知 $\lim_{\rho \rightarrow 1} \Phi(\rho w) = \Phi^+(w)$, 可证当 $0 < \rho < 1$ 且 $\rho \rightarrow 1$ 时, 存在一仅与 $\varphi(u)$ 有关的正数 K_1 , 使对 $w\bar{w}'=1$ 上的 w 恒有

$$|\Phi(\rho w) - \Phi^+(w)| \leq K_1(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

由第一章 § 1.5, 知道 $\Phi^+(v) \in \operatorname{Lip}(\alpha-\delta)$. δ 是小于 α 的任一正数. 因而存在一仅与 δ 及 $\varphi(u)$ 有关的正数 K_2 , 使对 $w\bar{w}'=1$, $v\bar{v}'=1$ 的 w 与 v , 恒有

$$\begin{aligned}|\Phi^+(w) - \Phi^+(v)| &\leq K_2 |1-w\bar{v}'|^{\frac{\alpha-\delta}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{\alpha-\delta}{2}} K_2 |1-\rho w \bar{v}'|^{\frac{\alpha-\delta}{2}}.\end{aligned}$$

因此立得 (2.15.16). 其中 $K = K_1 + 2^{\frac{\alpha-\delta}{2}} K_2$.

定理 2.15.4 表明 Cauchy 型积分 (2.15.14) 在整个 $z\bar{z}' \leq 1$ 上连续, 即在第一章中讨论 (2.15.14) 的极限值公式时, 对路径所加的限制可以取消. 当然如同第一章中所做的那样, (2.15.15) 的右边, 还可以用别的 Cauchy 主值的形式来表达之.

现在刻划线性空间 \mathscr{A} 如下:

定理 2.15.5 若 $\varphi(u) \in \mathscr{L}^*$, 则下述三点等价: (i) $\varphi \in \mathscr{A}$, (ii) $\varphi = H\psi + \psi$, $\psi \in \mathscr{L}^*$, (iii) $H\varphi = \varphi$.

证 由系 2.13.3, (ii) \Rightarrow (iii) 是显然的.

(iii) \Rightarrow (i). 按 (2.15.14), 构造 $z\bar{z}' < 1$ 的解析函数 $\Phi(z)$, 根据定理 2.15.4 及 (iii), $\Phi(z)$ 的连续边界值为 $\Phi^+(v) = \varphi(v)$, 即 $\varphi \in \mathscr{A}$.

(i) \Rightarrow (ii). 利用 Cauchy 公式

$$\varphi(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) H(z, \bar{u}) \dot{u} \quad (z\bar{z}' < 1),$$

令 $z \rightarrow v (v\bar{v}' = 1)$, 由定理 2.15.4 知 $\varphi = H\psi + \psi$, 此处 $\psi = \varphi/2 \in \mathscr{L}^*$.

第三章 复超球面上的 Hadamard 主值

§ 3.1 引言

Hadamard[1] 在解双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题时, 引进了发散奇异积分的有限部分的概念. 例如, 在一维的情形, 当 $a < u < b$, $n \geq 0$ 时, 奇异积分

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+1}} \quad (3.1.1)$$

当 $n=0$ 时, 可以定义上述积分的 Cauchy 主值为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_a^{u-\varepsilon} \frac{f(x)dx}{x-u} + \int_{u+\varepsilon}^b \frac{f(x)dx}{x-u} \right\}, \quad (3.1.2)$$

如果上述极限存在的话. 当 $n > 0$ 时, 积分(3.1.1)是一个发散积分. Hadamard 引入的关于发散积分的有限部分的想法是这样的: 对于已给的 $f(x)$, 作一函数 $g(x)$, 使极限

$$\lim_{t \rightarrow u-0} \int_a^t \frac{f(x) - g(x)}{(x-u)^m} dx$$

存在的. 而这个有限的极限值, 就称为这个发散积分的有限部分. Hadamard 他自己讨论的是 $m = n + \frac{1}{2}$, n 为正整数的情形, 也就是他研究了

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+\frac{1}{2}}}, \quad n \text{ 为正整数} \quad (3.1.3)$$

的情形, 给出了很多重要的性质, 还对高维欧氏空间的发散的奇异

积分作了类似的处理, 并将这些工具用来解双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题, 详细的叙述可参考 Hadamard[1] 及吴新谋[1].

Fox[1] 根据 Hadamard 的想法, 把发散积分(3.1.1)的有限部分, 看作奇异积分的 Cauchy 主值的一种推广, 并且称它为这个发散积分的主值, 也称为 Hadamard 主值, 也就是发散积分(3.1.1)的 Hadamard 主值定义为

$$P \int_a^b \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_a^{u-\varepsilon} \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+1}} + \int_{u+\varepsilon}^b \frac{f(x)dx}{(x-u)^{n+1}} - H_n(u, \varepsilon) \right\},$$

这里

当 $n=0$ 时,

$$H_0(u, \varepsilon) = 0,$$

当 n 为正整数时,

$$H_n(u, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(u)}{i!} \left\{ \frac{1 - (-1)^{n-i}}{(n-i)\varepsilon^{n-i}} \right\}.$$

显然, 当 $n=0$ 时, 这就是通常的 Cauchy 主值.

当 a 趋于 $-\infty$, b 趋于 ∞ 时, $P \int_{-\infty}^{\infty}$ 看成为一维的 Hilbert 变换的推广.

这种想法立即可以推广到复平面上去, 这时 Hadamard 主值成了 Cauchy 型积分的一种推广.

Fox 得到了相应的 Plemelj 公式, 还应用它解一些边值问题及奇异积分方程.

在这一章中, 我们将 Hadamard 主值的概念推广到多复变数空间. 我们还是从最简单最基本的不可约域超球做起. 首先研究 O^n 中超球面上的高阶奇异积分

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)u}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

的 Hadamard 主值, 这里 $v\bar{v}'=1$, 并利用这个主值, 给出了相应的 Plemelj 公式.

多复变数与单复变数不同, 定义 Cauchy 主值的办法是很多的, 同样在多复变数中, 定义 Hadamard 主值的办法也不是一种, 而是多种.

这一章的另一部分是研究 G^n 中超球的 Cauchy 型积分的导数, 并得到了相应的 Plemelj 公式. 这时候, Cauchy 型积分的导数的极限值可以用超球面上的 Hadamard 主值来表达, 所以这也可以看作是 Hadamard 主值的一个应用.

如同在第六章中所做的那样: 这些结果, 都可以推广到强拟凸域上去.

这一章的内容取自史济怀、龚昇[3], [5].

§ 3.2 几条引理

引理 3.2.1 设 $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 我们有

$$\begin{aligned} J &= \int_{-(\pi-c)}^{-c} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} + \int_c^{\pi-c} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= 2\text{Im}(B_1 - B_2), \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \frac{1}{(1+re^{-ic})^{k-\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \log(1 - \sqrt{1+re^{-ic}}) - \log(1 + \sqrt{1+re^{-ic}}), \\ B_2 &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \frac{1}{(1-re^{ic})^{k-\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \log(1 - \sqrt{1-re^{ic}}) - \log(1 + \sqrt{1-re^{ic}}). \end{aligned}$$

证 由于

$$J = 2\operatorname{Re} \int_0^{\pi-c} \frac{d\theta}{(1-r\theta^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}},$$

命 $z = r\theta^{i\theta}$, 则

$$\int_0^{\pi-c} \frac{d\theta}{(1-r\theta^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{i} \int_{re^{i\pi}}^{-re^{-i\pi}} \frac{dz}{z(1-z)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

将

$$\frac{1}{z(1-z)^{n+\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1-z)^{k+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{z(1-z)^{\frac{1}{2}}}$$

代入上式, 即得所要证者.

引理 3.2.2 设 $d > 0$, $\beta > 0$, $\gamma = \alpha/\beta$, 如果命

$$A_n = -\frac{2^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha} (n-1)}{\pi(2n-1)} \operatorname{Im} \left(\int_0^1 \frac{x^{n-2} dx}{(x-i\gamma\sqrt{1-x^2})^{n-\frac{1}{2}}} \right),$$

那末

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{A_n}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} = 1,$$

其中 $\sigma_\varepsilon = \{u | \bar{u}u' = 1, \alpha^2(1-|u_n|^2)^2 + 4\beta^2(\operatorname{Im} u_n)^2 > \varepsilon^2\}$.

证 命 $c = \sin^{-1} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r}$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \dot{v} \left\{ \int_{-(\pi-c)}^0 \frac{d\theta}{(1-r\theta^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} + \int_0^{\pi-c} \frac{d\theta}{(1-r\theta^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} \right\} \\ &+ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' > \frac{\varepsilon}{\alpha}} \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1-r\theta^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

由引理 3.2.1,

$$I_1 = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n J_k + J_0 - J'_0 \right) - \left(\sum_{k=1}^n H_k + H_0 - H'_0 \right) \right\},$$

这里

$$J_k = \frac{2}{2k-1} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{\dot{v}}{(1+r\theta^{-i\theta})^{k-\frac{1}{2}}},$$

$$J_0 = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \log(1 - \sqrt{1+r\theta^{-i\theta}}) \dot{v},$$

$$H_k = \frac{2}{2k-1} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{\dot{v}}{(1 - re^{i\theta})^{k-\frac{1}{2}}},$$

$$H_0 = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \log(1 - \sqrt{1 - re^{i\theta}}) \dot{v},$$

$$J'_0 = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \log(1 + \sqrt{1 + re^{-i\theta}}) \dot{v},$$

$$H'_0 = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \log(1 + \sqrt{1 - re^{i\theta}}) \dot{v}.$$

由于

$$1 + re^{-i\theta} = 1 + \frac{(4\beta^2 r^2 - \varepsilon^2 + \alpha^2(1 - r^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2\beta} \\ - i \frac{(\varepsilon^2 - \alpha^2(1 - r^2)^2)^{\frac{1}{2}}}{2\beta},$$

采用球坐标, 命

$$1 - r^2 = s^2, \quad \eta = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad s = \sqrt{\eta} t,$$

则

$$J_k = \frac{4\pi^{n-1}}{(2k-1)\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}} \frac{s^{2n-3} ds}{\left\{ \begin{aligned} &[1 + (2\beta)^{-1}(4\beta^2(1-s^2) + \alpha^2 s^4 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}] \\ &- i(2\beta)^{-1}(\varepsilon^2 - \alpha^2 s^4)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}^{k-\frac{1}{2}}} \\ = \frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{k-\frac{1}{2}}}{(2k-1)\Gamma(n-1)} \eta^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{\left\{ \begin{aligned} &[2\beta + (4\beta^2(1-\eta t^2) + \alpha^2 \eta^2(t^4-1))^{\frac{1}{2}}] \\ &- i(\alpha^2 \eta^2(1-t^4))^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}^{k-\frac{1}{2}}}.$$

被积函数的绝对值不超过 $\frac{1}{4\beta^2}$, 所以

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_k = 0.$$

由于 $\operatorname{Im}(\log(1 \pm \sqrt{1 + re^{-i\theta}})) = O(1)$, 故有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} J_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} J'_0 = 0.$$

和 J_k 一样, H_k 可以写成

$$H_k = \frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{k-\frac{1}{2}}}{(2k-1) \Gamma(n-1)} \eta^{n-1} \\ \times \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{\left\{ [2\beta - (4\beta^2(1-\eta t^2) + \alpha^2 \eta^2(t^4-1))^{\frac{1}{2}}] \right.} \\ \left. - i(\alpha^2 \eta^2(1-t^4))^{\frac{1}{2}} \right\}^{k-\frac{1}{2}}}.$$

如果命

$$P = \beta t^2 - i\alpha \sqrt{1-t^4}, \quad Q = \frac{1}{4\beta} [\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)t^4],$$

那末

$$\begin{aligned} & [2\beta - \sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2) + \alpha^2 \eta^2(t^4-1)} - i\alpha\eta \sqrt{1-t^4}]^{k-\frac{1}{2}} \\ &= [(\beta t^2 - i\alpha \sqrt{1-t^4})\eta + \frac{\alpha^2 - (\alpha^2 - \beta^2)t^4}{4\beta} \eta^2 + O(\eta^3)]^{k-\frac{1}{2}} \\ &= \eta^{k-\frac{1}{2}} [P + Q\eta + O(\eta^2)]^{k-\frac{1}{2}} \\ &= \eta^{k-\frac{1}{2}} P^{k-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{Q}{P} \eta + O(\eta^2) \right]^{k-\frac{1}{2}} \\ &= \eta^{k-\frac{1}{2}} P^{k-\frac{1}{2}} \left[1 + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{Q}{P} \eta + O(\eta^2) \right] \\ &= \eta^{k-\frac{1}{2}} \left[P^{k-\frac{1}{2}} + \left(k - \frac{1}{2}\right) Q P^{k-\frac{3}{2}} \eta + O(\eta^2) \right], \end{aligned}$$

于是

$$H_k = \frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{k-\frac{1}{2}}}{(2k-1) \Gamma(n-1)} \eta^{n-k-\frac{1}{2}} \\ \times \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{P^{k-\frac{1}{2}} + \left(k - \frac{1}{2}\right) Q P^{k-\frac{3}{2}} \eta + O(\eta^2)}.$$

当 $k < n - \frac{1}{2}$ 时, 有 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$. 此外显然有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H'_0) = 0.$$

最后算 H_n .

$$H_n = \frac{4\pi^{n-1}(2\beta)^{n-\frac{1}{2}}}{(2n-1) \Gamma(n-1)} \frac{1}{\sqrt{\eta}}$$

$$\times \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{P^{n-\frac{1}{2}} + \left(n - \frac{1}{2}\right) Q P^{n-\frac{3}{2}} \eta + O(\eta^2)}.$$

容易看出 A_n 可以改写为

$$A_n = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \frac{4\pi^{n-1} (2\beta)^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha}}{(2n-1) \Gamma(n-1)} \\ \times \operatorname{Im} \left(\int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(\beta t^2 - i\alpha \sqrt{1-t^4})^{n-\frac{1}{2}}} \right).$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} H_n - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_n \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \frac{4\pi^{n-1} (2\beta)^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha}}{(2n-1) \Gamma(n-1)} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ & \times \operatorname{Im} \int_0^1 \left[\frac{t^{2n-3}}{P^{n-\frac{1}{2}} + \left(n - \frac{1}{2}\right) Q P^{n-\frac{3}{2}} \eta + O(\eta^2)} - \frac{t^{2n-3}}{P^{n-\frac{1}{2}}} \right] dt \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \frac{4\pi^{n-1} (2\beta)^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\alpha}}{(2n-1) \Gamma(n-1)} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ & \times \left\{ \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{-t^{2n-3} \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) P^{n-\frac{3}{2}} Q \eta + O(\eta^2) \right]}{P^{n-\frac{1}{2}} \left[P^{n-\frac{1}{2}} + \left(n - \frac{1}{2}\right) P^{n-\frac{3}{2}} Q \eta + O(\eta^2) \right]} dt \right\} \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \frac{4\pi^{n-1} (2\beta)^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\varepsilon}}{(2n-1) \Gamma(n-1) \sqrt{\alpha}} \\ & \times \left\{ \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{-t^{2n-3} \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) P^{n-\frac{3}{2}} Q + O(\eta) \right] dt}{P^{n-\frac{1}{2}} \left[P^{n-\frac{1}{2}} + \left(n - \frac{1}{2}\right) P^{n-\frac{3}{2}} Q \eta + O(\eta^2) \right]} \right\}. \end{aligned}$$

由此即得 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im}(H_n) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_n \right\} = 0$.

再看 I_2 , 因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1 - re^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} = 2\pi,$$

因而 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 1$. 综合上述, 即得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{i}{(1 - \bar{u}_\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{A_n}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} = 1.$$

引理 3.2.3 若 $u_j = x_j + iy_j, j=1, 2, \dots, n, p_n = (0, \dots, 0, 1)$, 则

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{x_n - 1}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} i = \frac{1-2n}{4n},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{y_n}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} i = -\frac{2n+1}{4n} i.$$

证 固定 $z(z\bar{z}' < 1)$, 设 $z\bar{z}' = \rho^2$, 存在酉方阵 U , 使 $zU = \rho p_n$, 作变换 $u = w\bar{U}'$, 则 $z\bar{u}' = \rho\bar{w}_n$. 命 $\bar{U}' = (a_{ij})$, 则

$$u_n = \sum_{j=1}^n a_{jn} w_j,$$

所以 $x_n = \operatorname{Re} u_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (a_{jn} w_j + \bar{a}_{jn} \bar{w}_j)$,

于是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(x_n - 1)i}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\sum_{j=1}^n (a_{jn} w_j + \bar{a}_{jn} \bar{w}_j) - 2}{(1 - \rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} i \\ &= \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{jn} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{w_j i}{(1 - \rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{jn} \right. \\ & \quad \times \left. \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_j i}{(1 - \rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} - 2 \int_{w\bar{w}'=1} \frac{i}{(1 - \rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \left\{ a_{nn} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{w_n i}{(1 - \rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \right. \\ & \quad \left. + \bar{a}_{nn} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_n i}{(1 - \rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} - 2 \int_{w\bar{w}'=1} \frac{i}{(1 - \rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

令 $u_1 = v_1, \dots, u_{n-1} = v_{n-1}, u_n = r e^{i\theta}, v = (v_1, \dots, v_{n-1})$, 而

$$\int_{w\bar{w}'=1} \frac{w_n \dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} = \int_{0 < v\bar{v}' < 1} \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r e^{-i\theta} d\theta}{(1-\rho r e^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}}.$$

由于

$$\frac{r e^{-i\theta}}{(1-\rho r e^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+q\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(q+1)} \rho^q r^{q+1} e^{i(q-1)\theta},$$

所以
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r e^{-i\theta} d\theta}{(1-\rho r e^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} = \left(n+\frac{1}{2}\right) 2\pi \rho r^2 = (2n+1)\pi \rho r^2.$$

由此即得
$$\frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{w_n \dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{2n+1}{4n} \rho.$$

用同样方法易证

$$\int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_n \dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} = 0, \quad \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} = 1.$$

从 $zU = \rho p_n$ 可以看出, 当 $z \rightarrow p_n$ 时, $\rho \rightarrow 1$. 设 U 趋于 \bar{U} , 则 \bar{U} 必须满足 $p_n \bar{U} = \rho_n$, 因此 $\alpha_{nn} \rightarrow 1$, $\alpha_{kn} \rightarrow 0 (k \neq n)$. 把这些结果代入 (3.2.1), 即得

$$\lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(x_n-1)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1-2n}{4n}.$$

同法可证另一等式.

引理 3.2.4

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\operatorname{Im}(\bar{u}_n)}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u} = -\frac{2n+1}{4ni},$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\operatorname{Re}(1-\bar{u}_n)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{2n-1}{4n}.$$

证 由于

$$\left| \frac{\operatorname{Re}(1-\bar{u}_n)}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{1}{|1-\bar{u}_n|^{n-\frac{1}{2}}},$$

所以

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\operatorname{Re}(1-\bar{u}_n)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} = \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\operatorname{Re}(1-\bar{u}_n)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}.$$

由引理 3.2.3, 即得要证的后一等式, 同样可证前一等式.

引理 3.2.5 等式

$$\int_{\sigma_e} \frac{\operatorname{Re} u_k}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u} = 0, \quad \int_{\sigma_i} \frac{\operatorname{Im} u_k}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u} = 0$$

对 $k=1, 2, \dots, n-1$ 成立.

证 不妨设 $k=1$, 命 $\bar{u}_n = r e^{i\theta}$, $u_1 = v_1, \dots, u_{n-1} = v_{n-1}$, 则有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_i} \frac{\operatorname{Re} u_1 \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \operatorname{Re} v_1 \dot{v} \\ &\quad \times \left\{ \int_{-(\pi-\varepsilon)}^{-\varepsilon} \frac{d\theta}{(1 - r e^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{d\theta}{(1 - r e^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' > \frac{\varepsilon}{\alpha}} \operatorname{Re} v_1 \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1 - r e^{i\theta})^{n+\frac{1}{2}}} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

如同前面讨论过的那样,

$$I_1 = \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n J_k + J_0 - J'_0 \right) - \left(\sum_{k=1}^n H_k + H_0 - H'_0 \right) \right\},$$

而

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{2}{2k-1} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{\operatorname{Re} v_1 \dot{v}}{(1 + r e^{-i\theta})^{k-\frac{1}{2}}}, \\ J_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} (\operatorname{Re} v_1) \log(1 - \sqrt{1 + r e^{-i\theta}}) \dot{v}, \\ J'_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} (\operatorname{Re} v_1) \log(1 + \sqrt{1 + r e^{-i\theta}}) \dot{v}, \\ H_k &= \frac{2}{2k-1} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{\operatorname{Re} v_1 \dot{v}}{(1 - r e^{i\theta})^{k-\frac{1}{2}}}, \\ H_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} (\operatorname{Re} v_1) \log(1 - \sqrt{1 - r e^{i\theta}}) \dot{v}, \\ H'_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} (\operatorname{Re} v_1) \log(1 + \sqrt{1 - r e^{i\theta}}) \dot{v}. \end{aligned}$$

用球坐标, $v = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-2})$, 则 $\operatorname{Re} v_1 = x_1$, $\operatorname{Im} v_1 = x_2$, $x_1 = s \cos \varphi_1$, $x_2 = s \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$, \dots , $x_{2n-2} = s \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-3}$,

$0 \leq \varphi_k \leq \pi (k=1, 2, \dots, 2n-4)$, $0 \leq \varphi_{2n-3} \leq 2\pi$. 于是

$$J_k = \frac{2}{2k-1} \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}} \frac{s^{2n-2} ds}{(1+re^{-is})^{k-\frac{1}{2}}} \int_0^\pi \cos \varphi_1 \sin^{2n-4} \varphi_1 d\varphi_1 \\ \times \int_0^\pi \sin^{2n-5} \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{2n-4} d\varphi_{2n-4} \int_0^{2\pi} d\varphi_{2n-3}.$$

因为 $\int_0^\pi \cos \varphi_1 \sin^{2n-4} \varphi_1 d\varphi_1 = 0$, 故

$$J_k = 0.$$

同样道理, $J_0 = J'_0 = H_k = H_0 = H'_0 = 0$,

所以 $I_1 = 0$.

同样 $I_2 = 0$.

因而
$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u|=1} \frac{\operatorname{Re} u_1 \dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} = 0.$$

引理的另一半, 可同法证之.

引理 3.2.6

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u|=1} \frac{\operatorname{Re} u_k}{(1-\bar{z}\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u} = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u|=1} \frac{\operatorname{Im} u_k}{(1-\bar{z}\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u} = 0.$$

$k=1, 2, \dots, n-1$.

证 与证明引理 3.2.3 的方法一样, 这时

$$u_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} w_j,$$

所以

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u|=1} \frac{\operatorname{Re} u_k \dot{u}}{(1-\bar{z}\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \alpha_{nk} \int_{|w|=1} \frac{w_n \dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

由于 $\lim_{\varepsilon \rightarrow p_n} \alpha_{nk} = 0 (k=1, 2, \dots, n-1)$, 即得第一个等式, 另一个等

式可同法证之.

§ 3.3 Hadamard 主值

引理 3.3.1 设 $f(u_1, \dots, u_n) = f(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ 是定义在 $\bar{u}u' \leq 1$ 上的实函数, 如果 $\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial y_j}$ ($j=1, 2, \dots, n$) 存在, 且在 $\bar{u}u' \leq 1$ 上分别满足 α_j 阶和 β_j 阶 Lipschitz 条件, 那末

(i) 积分

$$I_{x_k} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\bar{u}u'=1} \frac{\left\{ \begin{array}{l} f(0, \dots, 0, x_k + iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ - f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, \dots, 0, 1) x_k \end{array} \right\}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u},$$

$$I_{y_k} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\bar{u}u'=1} \frac{\left\{ \begin{array}{l} f(0, \dots, 0, iy_k, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) \\ - f(0, \dots, 0, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) \\ - \frac{\partial f}{\partial y_k}(0, \dots, 0, 1) y_k \end{array} \right\}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u},$$

$$I_{x_n} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\bar{u}u'=1} \frac{\left\{ \begin{array}{l} f(0, \dots, 0, x_n) - f(0, \dots, 0, 1) \\ - \frac{\partial f}{\partial x_n}(0, \dots, 0, 1) (x_n - 1) \end{array} \right\}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u},$$

$$I_{y_n} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\bar{u}u'=1} \frac{\left\{ \begin{array}{l} f(0, \dots, 0, x_n + iy_n) - f(0, \dots, 0, x_n) \\ - \frac{\partial f}{\partial y_n}(0, \dots, 0, 1) y_n \end{array} \right\}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u}$$

存在, 这里 $k=1, 2, \dots, n-1$.

(ii) 记

$$I_{x_k}(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\bar{u}u'=1} \frac{\left\{ \begin{array}{l} f(0, \dots, 0, x_k + iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ - f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, \dots, 0, 1) x_k \end{array} \right\}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u},$$

$$I_{y_k}(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} & f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ & - f(0, \dots, 0, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) \\ & - \frac{\partial f}{\partial y_k}(0, \dots, 0, 1)y_k \end{aligned} \right\}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} i, \quad$$

$$I_{x_n}(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} & f(0, \dots, 0, x_n) - f(0, \dots, 0, 1) \\ & - \frac{\partial f}{\partial x_n}(0, \dots, 0, 1)(x_n - 1) \end{aligned} \right\}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} i, \quad$$

$$I_{y_n}(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} & f(0, \dots, 0, x_n + iy_n) - f(0, \dots, 0, x_n) \\ & - \frac{\partial f}{\partial y_n}(0, \dots, 0, 1)y_n \end{aligned} \right\}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} u, \quad$$

这里 z 是 $z\bar{z}' < 1$ 中的点. 如果 z 在满足条件

$$\frac{\rho(z, p_n)}{d(z, L)} \leq M \quad (3.3.1)$$

之下趋于 p_n , 则必有

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow p_n} I_{x_k}(z) &= I_{x_k}, \\ \lim_{z \rightarrow p_n} I_{y_k}(z) &= I_{y_k}, \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

这里

$$\begin{aligned} p_n &= (0, \dots, 0, 1), \\ \rho(z, p_n) &= [(z - p_n)(\overline{z - p_n})']^{\frac{1}{2}}, \\ d(z, L) &= \min_{u \in L} |1 - z\bar{u}'| \end{aligned}$$

而 L 表示 $u\bar{u}'=1$, M 是一常数.

如同第一章的 § 1.10 中那样, 条件 (3.3.1) 是可以去掉的, 而以 K 极限来替代之.

证 极据中值定理及 $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in \text{Lip } \alpha_n$, 有

$$\begin{aligned}
& \left| f(0, \dots, 0, x_k + iy_k, \dots, x_n + iy_n) \right. \\
& \quad \left. - f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_k + iy_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, \dots, 0, 1)x_k \right| \\
&= \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, \dots, 0, tx_k + iy_k, \dots, x_n + iy_n) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, \dots, 0, 1) \right| |x_k| \\
&\leq K(t^2 x_k^2 + y_k^2 + \dots + y_n^2 + (x_n - 1)^2)^{\frac{\alpha_k}{2}} |x_k| \\
&\leq K(1 - x_n^2 + (x_n - 1)^2)^{\frac{\alpha_k}{2}} (1 - x_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_1(1 - x_n)^{\frac{\alpha_k + 1}{2}} \leq K_1 |1 - \bar{u}_n|^{\frac{\alpha_k + 1}{2}},
\end{aligned}$$

这里 K, K_1 为常数, $0 \leq t \leq 1$. 另一方面,

$$|1 - \bar{u}_n| = |1 - p_n \bar{u}'| \leq |1 - z \bar{u}'| + |(z - p_n) \bar{u}'|,$$

而

$$\begin{aligned}
|(z - p_n) \bar{u}'| &\leq [(z - p_n) \overline{(z - p_n)}]^{1/2} \\
&\leq M d(z, L) \leq M |1 - z \bar{u}'|,
\end{aligned}$$

所以 $|1 - \bar{u}_n| \leq (M + 1) |1 - z \bar{u}'|$,

即 $|1 - z \bar{u}'| \geq \frac{1}{M + 1} |1 - \bar{u}_n|$.

若记 $I_{s_k}(z)$ 的被积函数为 $g_k(z, u)$, 则有

$$|g_k(z, u)| \leq \frac{M_1}{|1 - \bar{u}_n|^{n - \frac{\alpha_k}{2}}}.$$

由于 $\int_{|u \bar{u}'|=1} \frac{\dot{u}}{|1 - \bar{u}_n|^{n - \frac{\alpha_k}{2}}}$ 存在, 故由 Lebesgue 定理, $\lim_{z \rightarrow p_n} g_k(z, u)$

是 $|u \bar{u}'|=1$ 上的可积函数 即 I_{s_n} 存在, 而且

$$\lim_{z \rightarrow p_n} \int_{|u \bar{u}'|=1} g_k(z, u) \dot{u} = \int_{|u \bar{u}'|=1} \lim_{z \rightarrow p_n} g_k(z, u) \dot{u},$$

此即 $\lim_{z \rightarrow p_n} I_{s_k}(z) = I_{s_k}$. 同法可证引理的其余部分, 至于去掉条件

(3.3.1), 这只要将 K 极限的条件替代之, 由 § 1.10 的推导即得

所要的结果.

定理 3.3.1 f 和 I_{x_k}, I_{y_k} ($k=1, \dots, n$) 如引理 3.3.1 所述, 我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(u) \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{f(p_n)}{\sqrt{\varepsilon}} A_n \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n (I_{x_k} + I_{y_k}) + \frac{1}{2n} \frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n} \\ & \quad - \frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n} + f(p_n). \end{aligned}$$

证 把 f 写成

$$\begin{aligned} f(u) &= f(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(0, \dots, 0, x_k + iy_k, \dots, x_n + iy_n) \right. \\ & \quad \left. - f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_n + iy_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n) x_k \right] \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(0, \dots, 0, iy_k, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) \right. \\ & \quad \left. - f(0, \dots, 0, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) - \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n) y_k \right] \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n) x_k \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n) y_k \\ & \quad + \left[f(0, \dots, 0, x_n + iy_n) - f(0, \dots, 0, x_n) - \frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n) y_n \right] \\ & \quad + \frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n) y_n \\ & \quad + \left[f(0, \dots, 0, x_n) - f(p_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n) (x_n - 1) \right] \\ & \quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n) (x_n - 1) + f(p_n), \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

于是

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(u) \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{f(p_n)}{\sqrt{\varepsilon}} A_n \\
& - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \left\{ \frac{f(0, \dots, 0, x_k + iy_k, \dots, x_n + iy_n)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \right. \\
& \quad \left. - f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_n + iy_n) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n) x_k \right\} \dot{u} \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \left\{ \frac{f(0, \dots, 0, iy_k, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \right. \\
& \quad \left. - f(0, \dots, 0, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n) y_k \right\} \dot{u} \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{x_k \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{y_k \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \left\{ \frac{f(0, \dots, 0, x_n + iy_n) - f(0, \dots, 0, x_n)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n) y_n \right\} \dot{u} \\
& + \frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{y_n \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(0, \dots, 0, x_n) - f(p_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n)(x_n - 1)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \dot{u} \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{(x_n - 1) \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} \\
& + f(p_n) \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{A_n}{\sqrt{\varepsilon}} \right\},
\end{aligned}$$

由引理 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5 及 3.3.1, 即得所要证明的等式.

定理 3.3.2 设 v 是超球面 $u\bar{u}'=1$ 上任一点, f 如引理 3.3.1 所述, 我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon(v)} \frac{f(u)u}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\varepsilon}} A_n \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n (J_{x_k} + J_{y_k}) + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(v) v_j \\ & \quad - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(v) \bar{v}_j + f(v), \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

这里

$\sigma_\varepsilon(v) = \{u \mid v\bar{u}'=1, \alpha^2(1-|v\bar{u}'|^2)^2 + 4\beta^2(\operatorname{Im}(v\bar{u}'))^2 > \varepsilon^2\}$,
 J_{x_k}, J_{y_k} 是把 I_{x_k}, I_{y_k} 中的 $f(u)$ 代以 $f(u\bar{U}')$ 所得之积分, 而 U 是使得 $vU = p_n$ 成立的酉方阵.

证 作变换 $uU = w$, 则 $v\bar{u}' = \bar{w}_n$, 于是 (3.3.3) 的左端为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(w\bar{U}')w}{(1-\bar{w}_n)^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{f(p_n\bar{U}')}{\sqrt{\varepsilon}} A_n \right\}.$$

根据定理 3.3.1, 此为

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (J_{x_k} + J_{y_k}) + \frac{1}{2n} \frac{\partial f(w\bar{U}')}{\partial w_n}(p_n\bar{U}') \\ & \quad - \frac{\partial f(w\bar{U}')}{\partial \bar{w}_n}(p_n\bar{U}') + f(p_n\bar{U}'). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

设 $\bar{U}' = (\alpha_{ij})$, 则 $(v_1, \dots, v_n) = (\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn})$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(w\bar{U}')}{\partial w_n} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j} v_j, \\ \frac{\partial f(w\bar{U}')}{\partial \bar{w}_n} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j} \bar{v}_j, \end{aligned}$$

代入 (3.3.4), 即为 (3.3.3).

称 (3.3.3) 为奇异积分

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)u}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}$$

的 Hadamard 主值, 记为

$$\begin{aligned}
& P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon(v)} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{f(v)}{\sqrt{\varepsilon}} A_n \right\}.
\end{aligned}$$

§ 3.4 含有 Hadamard 主值的 Plemelj 公式

设 z 是单位球 $z\bar{z}' < 1$ 中一点, 命

$$F(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}},$$

当 $z \rightarrow p_n = (0, \dots, 0, 1)$ 时, 可有如下的 Plemelj 公式.

定理 3.4.1 f 如引理 3.3.1 所述, 当 z 从 $z\bar{z}' < 1$ 的内部趋于 p_n 时, 如果保持

$$\frac{\rho(z, p_n)}{d(z, L)} < M \quad (M \text{ 为一常数}), \quad (3.4.1)$$

那末

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\
& = P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

证 由定理 3.3.1 的证明中的 (3.3.2), 我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^n [I_{x_k}(z) + I_{y_k}(z)] \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{x_k \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\
& + \sum_{k=1}^{n-1} \int \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{y_k \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(x_n-1)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{y_n \dot{u}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\
& + f(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

由引理 3.3.1, 3.2.3, 3.2.5, 以及

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\dot{u}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} = 1,$$

即得

$$\begin{aligned}
& \lim_{\kappa \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) \dot{u}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\
& = \sum_{k=1}^n (I_{x_k} + I_{y_k}) + \frac{1}{2n} \frac{\partial f}{\partial u_n}(p_n) \\
& \quad - \frac{\partial f}{\partial \bar{u}_n}(p_n) + f(p_n),
\end{aligned}$$

由定理 3.3.1, 即得所要的证明.

由此立即得到

定理 3.4.2 设 $f = f_1 + if_2$ 是定义在 $u\bar{u}' \leq 1$ 上的复函数, f_1, f_2 分别为 f 的实部与虚部, f_1, f_2 满足引理 3.3.1 中的条件. 设 v 是 $u\bar{u}' = 1$ 上任一点, 当 z 从 $z\bar{z}' < 1$ 的内部趋于 v 时, 如果保持条件(3.4.1), 则

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow v} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) \dot{u}}{(1 - z\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\
& = P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) \dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
& P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) \dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} \\
& = P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f_1(u) \dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}} + iP \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f_2(u) \dot{u}}{(1 - v\bar{u}')^{n+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

定理 3.4.1 及定理 3.4.2 中的条件(3.4.1)是可以去掉而换

成 K -极限, 这只要用第一章 § 1.10 中的办法即可.

§ 3.5 复超球面上 Cauchy 型积分的导数

在一个复变数时, 若 L 为 G 中一条光滑的封闭曲线, 则 f 的 Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

的导数

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

仍然是一个 Cauchy 型积分.

在多个复变数时, 情况就大不相同. Cauchy 型积分的导数不能简单地归化为 Cauchy 型积分. 还是从最简的、最本质的不可约域——超球——开始研究.

若 $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z\bar{z}' < 1$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $f(u)$ 是定义在 C^n 中超球面 $u\bar{u}' = 1$ 上的可积函数. 显然, 它的 Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{f(u) \dot{u}}{(1 - zu')^n}$$

的偏导数

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u} f(u) \dot{u}}{(1 - zu')^{n+1}}$$

不再是 Cauchy 型积分, 这里

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \left(\frac{\partial F(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F(z)}{\partial z_n} \right),$$

当 z 趋于边界 $u\bar{u}' = 1$ 上点 v 时, 上式右端是一个高阶奇异积分.

在以下几节中, 我们将用 Hadamard 主值来表达它的边界值, 可以发现以下的有趣的现象, 我们必须把球面上两类不同的点分开来处理, 如果记

$$P_f = \{v = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \mid v\bar{v}' = 1, v_i = 0\},$$

$$Q_j = \{v = (v_1, \dots, v_j, \dots, v_n) \mid v\bar{v}' = 1, v_j \neq 0\},$$

则对 P_j 中的点, 用 Cauchy 主值就能表示 $\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}$ 当 z 趋于 v 时的极限值; 而对 Q_j 中的点, 则必须用 Hadamard 主值来表示. 由于 Hadamard 主值与 Cauchy 主值的一致性, 所以可以统一地用 Hadamard 主值来表示. 在以下的 § 3.6 及 § 3.7 中分别讨论这两种不同的情形.

我们先证明几条引理.

引理 3.5.1 对单位球内任意点 z , 均有

$$\int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^m} = 0,$$

这里 m 是任意正数, $j=1, 2, \dots, n$.

证 设 $z\bar{z}' = \rho^2$, 取酉方阵 U , 使得 $zU = \rho p_n$, 这里 $p_n = (0, \dots, 0, 1)$. 作变换 $u = w\bar{U}'$, 命 $\bar{U}' = (\alpha_{ij})$, 则

$$u_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} w_i,$$

于是

$$\int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^m} = \sum_{i=1}^n \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{\alpha}_{ij} \bar{w}_i}{(1-\rho\bar{w}_n)^m} \dot{w}. \quad (3.5.1)$$

当 $l < n$ 时,

$$\int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_l \dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^m} = \int_{v\bar{v}'<1} \bar{v}_l \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1-\rho r e^{i\theta})^m} = 2\pi \int_{v\bar{v}'<1} \bar{v}_l \dot{v}.$$

对右端积分作变换 $v_j = e^{i\theta_j} \zeta_j$ ($\theta_j > 0$, $j=1, 2, \dots, n-1$), 则

$$\int_{v\bar{v}'<1} \bar{v}_l \dot{v} = e^{-i\theta_l} \int_{\zeta\bar{\zeta}'<1} \bar{\zeta}_l \dot{\zeta},$$

所以 $\int_{v\bar{v}'<1} \bar{v}_l \dot{v} = 0$. 因而

$$\int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_l \dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^m} = 0 \quad (l < n).$$

当 $l=n$ 时, 由于

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r e^{i\theta} d\theta}{(1-\rho r e^{i\theta})^m} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+q)}{\Gamma(q+1)\Gamma(m)} \rho^q r^{q+1}$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(q+1)\theta} d\theta = 0,$$

所以

$$\int_{|w\bar{w}'|=1} \frac{\bar{w}_n \dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^m} = 0.$$

把这些结果代入(3.5.1), 即得所要证明的结论.

引理 3.5.2 设 z 是单位球内任一点, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1} \frac{\bar{u}_j x_k}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} &= \frac{1}{2n} \delta_{kj}, \\ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1} \frac{\bar{u}_j y_k}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} &= \frac{1}{2ni} \delta_{kj}, \end{aligned}$$

这里 $j, k=1, 2, \dots, n, u_k = x_k + iy_k$.

证 命
$$G(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1} \frac{x_k}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u},$$

根据 Cauchy 积分公式以及引理 3.5.1, 有

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1} \frac{u_k}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1} \frac{\bar{u}_k}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} \right\} = \frac{1}{2} z_k. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial G}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \delta_{kj},$$

这就证明了第一个等式. 同样办法可证第二个等式.

引理 3.5.3 设 $f(u_1, \dots, u_n) = f(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ 是定义在 $|u\bar{u}'| \leq 1$ 上的实函数, 如果 $\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial y_j}$ ($j=1, 2, \dots, n$) 存在, 且在 $|u\bar{u}'| \leq 1$ 上分别满足 α_j 阶和 β_j 阶 Lipschitz 条件, 那末

(i) 对 $j, k=1, 2, \dots, n-1$, 积分

$$I_{\alpha_k}^{(p)} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}_j [f(0, \dots, 0, x_k + iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ &- f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ &- \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n) x_k] \end{aligned} \right\}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u},$$

$$I_{y_k}^{(f)} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}_j [f(0, \dots, 0, iy_k, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) \\ &\quad - f(0, \dots, 0, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n) y_k] \end{aligned} \right\}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u},$$

$$I_{x_n}^{(f)} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}_j [f(0, \dots, 0, x_n) - f(0, \dots, 0, 1)] \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n) (x_n - 1)] \end{aligned} \right\}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u},$$

$$I_{y_n}^{(f)} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}_j [f(0, \dots, 0, x_n + iy_n) - f(0, \dots, 0, x_n)] \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n) y_n] \end{aligned} \right\}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}$$

存在;

(ii) 记

$$I_{x_k}^{(f)}(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}_j [f(0, \dots, 0, x_k + iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ &\quad - f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n) x_k] \end{aligned} \right\}}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u},$$

$$I_{y_k}^{(f)}(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}_j [f(0, \dots, 0, iy_k, \dots, x_n + iy_n) \\ &\quad - f(0, \dots, 0, x_{k+1} + iy_{k+1}, \dots, x_n + iy_n) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n) y_k] \end{aligned} \right\}}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u},$$

$$I_{x_n}^{(f)}(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}_j [f(0, \dots, 0, x_n) - f(0, \dots, 0, 1)] \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n) (x_n - 1)] \end{aligned} \right\}}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u},$$

$$I_{y_n}^{(f)}(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\left\{ \begin{aligned} &\bar{u}_j [f(0, \dots, 0, x_n + iy_n) - f(0, \dots, 0, x_n)] \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n) y_n] \end{aligned} \right\}}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u},$$

这里 z 是单位球内的点, 如果 z 在满足条件 (3.3.1) 之下趋于 p_n , 则必有

$$\lim_{z \rightarrow p_n} I_{x_k}^{(j)}(z) = I_{x_k}^{(j)}, \quad \lim_{z \rightarrow p_n} I_{y_k}^{(j)}(z) = I_{y_k}^{(j)} \\ (j=1, \dots, n-1; k=1, \dots, n).$$

这条引理的证明与引理 3.3.1 的证明相仿, 同样, 条件 (3.3.1) 是可以去掉而代之以 K -极限.

引理 3.5.4 对 $j=1, 2, \dots, n-1$, 有

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_j \dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} = 0,$$

这里

$$\sigma_\varepsilon = \{u | u\bar{u}' = 1, \alpha^2(1-|u_n|^2)^2 + 4\beta^2(\operatorname{Im} u_n)^2 > \varepsilon^2, \alpha > 0, \beta > 0\}.$$

证 命 $u_n = re^{i\theta}$, $u_1 = v_1, \dots, u_{n-1} = v_{n-1}$, 则

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_j \dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{2}} \bar{v}_j \dot{v} \left\{ \int_{-(\pi-\theta)}^{-\theta} \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^{n+1}} \right. \\ \left. + \int_{\theta}^{\pi-\theta} \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^{n+1}} \right\} \\ + \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{2}} \bar{v}_j \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^{n+1}} = I_1 + I_2,$$

这里

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r}.$$

把 I_1 的内层积分记为 $\varphi(r)$, 作变换 $v_j = e^{i\tau} \zeta_j$, 由于 $r^2 = 1 - v\bar{v}'$, 便有

$$I_1 = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{2}} \bar{v}_j \varphi(r) \dot{v} = \int_{|\zeta'| < \frac{\varepsilon}{2}} e^{-i\tau} \bar{\zeta}_j \varphi(r) \dot{\zeta} = e^{-i\tau} I_1,$$

所以 $I_1 = 0$. 同样道理 $I_2 = 0$.

引理 3.5.5 对于 $j=1, \dots, n-1, k=1, \dots, n$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_j x_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{2n} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \right] \delta_{jk}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_j y_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{2ni} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \right] \delta_{jk}.$$

证 显然

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_j x_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_j u_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} + \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_j \bar{u}_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

和引理 3.5.4 的证法一样, 易知

$$\int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_j \bar{u}_k \dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} = 0 \quad (j=1, \dots, n-1, k=1, \dots, n), \quad (3.5.3)$$

$$\int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_j u_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = 0 \quad (j \neq k). \quad (3.5.4)$$

当 $j=k < n$ 时, 不妨先取 $j=1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{|u_1|^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} |v_1|^2 \dot{v} \left\{ \int_{-(\pi-\theta)}^0 \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\pi-\theta} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}} \right\} + \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' > \frac{\varepsilon}{\alpha}} |v_1|^2 \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^{n+1}} \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

易证(参阅第六章)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^n J_k - \sum_{k=1}^n H_k + J_0 - H_0 \right\} \\ &+ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} |v_1|^2 (\pi - 2\theta) \dot{v}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} |v_1|^2 \log \frac{1}{1+re^{-i\theta}} \dot{v}, \\ J_k &= \frac{1}{k} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{|v_1|^2 \dot{v}}{(1+re^{-i\theta})^k}, \\ H_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} |v_1|^2 \log \frac{1}{1-re^{i\theta}} \dot{v}, \end{aligned}$$

$$H_k = \frac{1}{k} \int_{|v| < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{|v_1|^2 \dot{v}}{(1 - r\theta^{2n})^k}.$$

设 $v = (t_1, t_2, \dots, t_{2n-2})$, 用球坐标

$$t_1 = s \cos \varphi_1, \quad t_2 = s \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad \dots,$$

$$t_{2n-2} = s \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-3}.$$

则 $|v_1|^2 = t_1^2 + t_2^2 = s^2 (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2).$

于是

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{k} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2) \\ &\quad \times \sin^{2n-4} \varphi_1 \sin^{2n-5} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-4} d\varphi_1 \cdots d\varphi_{2n-3} \\ &\quad \times \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{4\beta^2(1-s^2) + \alpha^2 s^4 - s^2}}{2\beta} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2 s^4}}{2\beta} \right\}^{-k} s^{2n-1} ds \end{aligned}$$

对内层积分作变换

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad s = \sqrt{\eta} t,$$

内层积分变为

$$\begin{aligned} &(2\beta)^k \eta^n \int_0^1 t^{2n-1} [2\beta + \sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2) + \alpha^2 \eta^2(t^4-1)} \\ &\quad - i \sqrt{\alpha^2 \eta^2(1-t^4)}]^{-k} dt. \end{aligned}$$

因为被积函数有界, 上式当 $\eta \rightarrow 0$ 时趋于 0, 因而

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

用同样方法可以证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0 = 0.$$

和 J_k 一样, H_k 可以写为

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{1}{k} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2) \\ &\quad \times \sin^{2n-4} \varphi_1 \sin^{2n-5} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-4} d\varphi_1 \cdots d\varphi_{2n-3} \end{aligned}$$

$$\times (2\beta)^k \eta^n \int_0^1 t^{2n-1} [2\beta - \sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2) + \alpha^2 \eta^2(t^4-1)} \\ - i\sqrt{\alpha^2 \eta^2(1-t^4)}]^{-k} dt.$$

记内层积分为 M_k , 则

$$M_k = (2\beta)^k \eta^n \int_0^1 t^{2n-1} \eta^{-k} [(\beta t^2 - i\alpha\sqrt{1-t^4}) + O(\eta)]^{-k} dt.$$

显然, 当 $k < n$ 时,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_k = 0,$$

因而

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_k = 0.$$

当 $k = n$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_n &= (2\beta)^n \int_0^1 \frac{t^{2n-1} dt}{(\beta t^2 - i\alpha\sqrt{1-t^4})^n} \\ &= 2^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{(x - i\gamma\sqrt{1-x^2})^n}. \end{aligned}$$

在第六章中将要证明

$$\operatorname{Im} \left(\int_0^1 \frac{x^{n-1} dx}{(x - i\gamma\sqrt{1-x^2})^n} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^n.$$

于是得到
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_n) = 2^{n-2} \pi \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^n.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2) \\ &\quad \times \sin^{2n-4} \varphi_1 \sin^{2n-5} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-4} d\varphi_1 \cdots d\varphi_{2n-3} = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)}, \end{aligned}$$

因而
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_n) = \frac{\pi^n}{2n\Gamma(n)} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n.$$

另外容易证明

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_0) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\nu\bar{\nu} < \frac{\epsilon}{\alpha}} |v_1|^2 (\sigma - 2\epsilon) \dot{v} = 0.$$

把这些结果代入 I_1 的表达式, 得

$$\lim_{s \rightarrow 0} I_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-1}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im}(H_s) = -\frac{1}{4n} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n,$$

而
$$\lim_{s \rightarrow 0} I_2 = \frac{\pi}{\omega_{2n-1}} \int_{|v| < 1} |v_1|^2 \dot{v} = \frac{1}{2n}.$$

把这些结果代入 (3.5.5), 即得

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{|u_1|^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{2n} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \right]. \quad (3.5.6)$$

显然, 把 u_1 换成 $u_j (j=2, \dots, n-1)$, 上式也成立. 把 (3.5.3), (3.5.4), (3.5.6) 代入 (3.5.2), 即得第一个等式. 另一个等式可同法证之.

§ 3.6 部分特殊点处的极限值

利用上节这些引理, 便可证明

定理 3.6.1 若 f 满足引理 3.5.3 的条件, $F(z)$ 为 f 的 Cauchy 型积分

$$F(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1} \frac{f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^n}.$$

当 z 从超球内部趋于 p_n 时, 如果满足 (3.3.1), 那末对

$$j=1, 2, \dots, n-1,$$

有

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{\partial F}{\partial z_j}(z) &= \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1(r)} \frac{\bar{u}_j f(u)\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_n), \end{aligned}$$

这里 $\int_{|u\bar{u}'|=1(r)}$ 表示 Cauchy 主值, 定义为 $\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\sigma_s}$.

证 显然

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{|u\bar{u}'|=1} \frac{\bar{u}_j f(u)\dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}. \quad (3.6.1)$$

由(3.3.2), 即得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j f(u) \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n [I_{x_k}^{(j)}(z) + I_{y_k}^{(j)}(z)] \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j x_k \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_k}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j y_k \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial y_n}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j y_n \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j (x_n - 1) \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &+ f(p_n) \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

根据引理 3.5.1, 3.5.2 及 3.5.3, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_j f(u) \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (I_{x_k}^{(j)} + I_{y_k}^{(j)}) + \frac{1}{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_n) + \frac{1}{2ni} \frac{\partial f}{\partial y_j}(p_n) \\
 &= \sum_{k=1}^n (I_{x_k}^{(j)} + I_{y_k}^{(j)}) + \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_n). \quad (3.6.2)
 \end{aligned}$$

另一方面, 根据引理 3.5.3, 3.5.4 及 3.5.5, 又有

$$\begin{aligned}
 & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_2} \frac{\bar{u}_j f(u) \dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n (I_{x_k}^{(j)} + I_{y_k}^{(j)}) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_n) \frac{1}{2n} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \right] \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial y_j}(p_n) \frac{1}{2ni} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n (I_{x_k}^{(j)} + I_{y_k}^{(j)}) \\
 &+ \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \right] \frac{\partial f}{\partial u_j}(p_n),
 \end{aligned}$$

或者

$$\sum_{k=1}^n (I_{x_k}^{(\rho)} + I_{y_k}^{(\rho)}) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1(r)} \frac{\bar{u}_j f(u) \dot{u}}{(1-u_n)^{n+1}} \\ - \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^n \right] \frac{\partial f}{\partial u_j} (p_n).$$

代入 (3.6.2), 即得所要证的结果.

定理 3.6.2 设 $f = f_1 + if_2$ 是定义在 $u\bar{u}' \leq 1$ 上的复函数, f_1, f_2 分别满足引理 3.5.3 的条件, 设 $F(z)$ 为 $f(u)$ 的 Cauchy 型积分, 记

$$P_k = \{v = (v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) \mid v\bar{v}' = 1, v_k = 0\}.$$

如果 z 在条件 (3.3.1) 之下从单位球内趋于 P_k 中的点 v , 那末对 $k=1, 2, \dots, n$ 均有

$$\lim_{z \rightarrow v} \frac{\partial F}{\partial z_k}(z) = \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^n \frac{\partial f}{\partial u_k}(v),$$

这里右端第一个积分定义为

$$\frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n}{\omega_{2n-1}} \left\{ \int_{\sigma_\varepsilon(v)} \frac{\bar{u}_k f_1(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \right. \\ \left. + i \int_{\sigma_\varepsilon(v)} \frac{\bar{u}_k f_2(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \right\},$$

而

$$\sigma_\varepsilon(v) = \{u \mid u\bar{u}' = 1, \alpha^2(1 - |v\bar{u}'|^2)^2 + 4\beta^2(\operatorname{Im} v\bar{u}')^2 > \varepsilon^2\}.$$

证 取酉方阵 U , 使 $vU = p_n$, 记 $\bar{U}' = (\alpha_{ij})$, 从 $v = p_n \bar{U}'$ 得

$$(v_1, \dots, v_n) = (\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nn}),$$

因而 $\alpha_{nk} = 0$. 命 $uU = w$, 则

$$u_k = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{jk} w_j.$$

记 $zU = \zeta$, 则当 $z \rightarrow v$ 时, $\zeta \rightarrow p_n$. 于是

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow v} \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f_1(u)}{(1 - v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_{jk} \left\{ \lim_{\zeta \rightarrow p_n} \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_j f_1(w\bar{U}')}{(1 - \zeta\bar{w}')^{n+1}} \dot{w} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_{jk} \left\{ \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1(r)} \frac{\bar{w}_j f_1(w\bar{U}')}{(1 - w_n)^{n+1}} \dot{w} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \frac{\partial f_1(w\bar{U}')}{\partial w_j} (p_n) \right\} \\
&= \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f_1(u)}{(1 - v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_{jk} \alpha_{ji} \frac{\partial f_1}{\partial u_i}(v) \\
&= \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f_1(u)}{(1 - v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n \frac{\partial f_1}{\partial u_k}(v).
\end{aligned}$$

对 f 的虚部 f_2 可得同样的结果.

在上述定理中, 若取 $\alpha = \beta$, 则得更简单的公式:

$$\lim_{z \rightarrow v} \frac{\partial F}{\partial z_k}(z) = \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f(u)}{(1 - v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial u_k}(v),$$

这里 $v \in P_k$.

如前面 § 1.10 所讨论的那样, 定理 3.6.1 及定理 3.6.2 中的条件 (3.3.1) 是可以去掉的, 而替代以 K 极限.

§ 3.7. 用 Hadamard 主值表示边界值

本节讨论 Cauchy 型积分的导数在球面上一般点处的极限值.

引理 3.7.1

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n x_k x_l}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} &= \frac{1}{2n} \delta_{nk} \delta_{nl}, \\
\lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n x_k y_l}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} &= \frac{1}{2ni} \delta_{nk} \delta_{nl},
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n y_k y_l}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} = -\frac{1}{2n} \delta_{nk} \delta_{nl},$$

证 命 $G(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{x_k x_l}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u}.$

因为 $x_k = \frac{1}{2}(u_k + \bar{u}_k), \quad x_l = \frac{1}{2}(u_l + \bar{u}_l),$

所以

$$G(z) = \frac{1}{4\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{u_k u_l + \bar{u}_k \bar{u}_l + u_k \bar{u}_l + \bar{u}_k u_l}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u}. \quad (3.7.1)$$

根据 Cauchy 积分公式,

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{u_k u_l}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} = z_k z_l,$$

此外, 利用证明引理 3.5.1 的方法, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k u_l}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} \\ &= \frac{1}{4\omega_{2n-1}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ii} \bar{\alpha}_{jk} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{w_i \bar{w}_j}{(1-\rho\bar{w}_n)^n} \dot{w} \\ &= \frac{1}{4\omega_{2n-1}} \sum_{j=1}^n \alpha_{jj} \bar{\alpha}_{jk} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{|w_j|^2}{(1-\rho\bar{w}_n)^n} \dot{w}. \end{aligned}$$

不难算出

$$\int_{w\bar{w}'=1} \frac{|w_j|^2 \dot{w}}{(1-\rho\bar{w}_n)^n} = \frac{2\pi^n}{\Gamma(n+1)} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

于是 $\frac{1}{4\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k u_l}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} = \frac{1}{4n} \delta_{kl}.$

易知

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k \bar{u}_l}{(1-z\bar{u}')^n} \dot{u} \\ &= \frac{1}{4\omega_{2n-1}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{ii} \bar{\alpha}_{jk} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_i \bar{w}_j}{(1-\rho\bar{w}_n)^n} \dot{w} = 0. \end{aligned}$$

把这些结果代入(3.7.1), 得

$$G(z) = \frac{1}{4} z_k z_l + \frac{1}{2n} \delta_{kl}.$$

由此得

$$\lim_{z \rightarrow p_n} \frac{\partial G}{\partial z_n}(z) = \frac{1}{2} \delta_{nk} \delta_{nl}.$$

这就是要证的第一个等式. 同法可证其余两个等式.

引理 3.7.2

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n(x_n-1)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^{n-1} \frac{(n-1)\beta}{n(\alpha+\beta)}, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n y_n}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^{n-1} \frac{\beta+n\alpha}{n(\alpha+\beta)} \right\}, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n x_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = 0 \\ & \quad (k=1, 2, \dots, n-1), \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n y_k}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = 0 \\ & \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

证 先证第二个等式. 由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n y_n}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \frac{1}{2i\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{u}_n u_n - \bar{u}_n^2}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \frac{1}{2i\omega_{2n-1}} \int_{|\bar{u}'| < \frac{\varepsilon}{2}} \dot{u} \left\{ 2\operatorname{Re} \int_0^{\pi-\theta} \frac{r^2 - r^2 \theta^{2i\theta}}{(1-r\theta^{i\theta})^{n+1}} d\theta \right\} \\ & \quad + \frac{1}{2i\omega_{2n-1}} \int_{|\bar{u}'| > \frac{\varepsilon}{2}} \dot{u} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2(1-\theta^{2i\theta})}{(1-r\theta^{i\theta})^{n+1}} d\theta \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi-\theta} \frac{r^2 - r^2 e^{2i\theta}}{(1 - r e^{i\theta})^{n+1}} d\theta &= \frac{1}{i} \int_{re^{i\theta}}^{-re^{-i\theta}} \frac{r^2 - z^2}{z(1-z)^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{i} \left\{ r^2 \int_{re^{i\theta}}^{-re^{-i\theta}} \frac{dz}{z(1-z)^{n+1}} - \int_{re^{i\theta}}^{-re^{-i\theta}} \frac{z}{(1-z)^{n+1}} dz \right\} \\
&= \frac{1}{i} \left\{ \left[\frac{r^2-1}{n} \frac{1}{(1+re^{-i\theta})^n} + \frac{r^2+1}{n-1} \frac{1}{(1+re^{-i\theta})^{n-1}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{r^2}{k} \frac{1}{(1+re^{-i\theta})^k} + r^2 \log(-re^{-i\theta}) - r^2 \log(1+re^{-i\theta}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{r^2-1}{n(1-re^{i\theta})^n} + \frac{r^2+1}{(n-1)(1-re^{i\theta})^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{r^2}{k(1-re^{i\theta})^k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + r^2 \log re^{i\theta} - r^2 \log(1-re^{i\theta}) \right] \right\} = \frac{1}{i} [B_1 - B_2].
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2i\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} 2\operatorname{Re} \left(\int_c^{\pi-\theta} \frac{r^2(1-e^{2i\theta})}{(1-re^{i\theta})^{n-1}} d\theta \right) \dot{v} \\
&= \frac{1}{i\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \operatorname{Im}(B_1 - B_2) \dot{v} \\
&= \frac{1}{i\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \left(\sum_{k=1}^n J_k + J_0 - J'_0 \right) - \left(\sum_{k=1}^n H_k + H_0 - H'_0 \right) \right\},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{n} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{r^2-1}{(1+re^{-i\theta})^n} \dot{v}, \\
J_{n-1} &= \frac{1}{n-1} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{r^2+1}{(1+re^{-i\theta})^{n-1}} \dot{v}, \\
J_k &= \frac{1}{k} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{r^2 \dot{v}}{(1+re^{-i\theta})^k} \\
&\quad (k=1, \dots, n-2), \\
J_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} r^2 \log(-re^{-i\theta}) \dot{v}, \\
J'_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} r^2 \log(1+re^{-i\theta}) \dot{v}, \\
H_n &= \frac{1}{n} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{r^2-1}{(1-re^{i\theta})^n} \dot{v},
\end{aligned}$$

$$H_{n-1} = \frac{1}{n-1} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{r^2 + 1}{(1 - r\theta^{i\alpha})^n} \dot{v},$$

$$H_k = \frac{1}{k} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{r^2 \dot{v}}{(1 - r\theta^{i\alpha})^k}$$

$$(k=1, 2, \dots, n-2),$$

$$H_0 = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} r^2 \log(r\theta^{i\alpha}) \dot{v},$$

$$H'_0 = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} r^2 \log(1 - r\theta^{i\alpha}) \dot{v}.$$

用引理 3.5.5 中处理 J_k 的方法, 容易证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(J_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(J'_0) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_k = 0, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

此外
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H'_0) = 0,$$

而

$$\begin{aligned} H_{n-1} &= \frac{1}{n-1} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{1 + r^2}{(1 - r\theta^{i\alpha})^{n-1}} \dot{v} \\ &= \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-1)} (2\beta)^{n-1} \int_0^1 \frac{(2 - \eta t^2) \eta^{n-1} t^{2n-3} dt}{\eta^{n-1} [\beta t^2 - i\alpha \sqrt{1-t^2} + O(\eta)]^{n-1}}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_{n-1}) &= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} 2^{n-1} \operatorname{Im} \left(\int_0^1 \frac{x^{n-2} dx}{(x - ir \sqrt{1-x^2})^{n-1}} \right) \\ &= \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

用完全相同的方法可以证明

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_n) &= -\frac{\pi^n}{n\Gamma(n-1)} \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_k &= 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-2). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 &= \frac{1}{i\omega_{2n-1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-H_n - H_{n-1}) \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \frac{\beta + n\alpha}{n(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

再看 I_2 . 由于

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2(1-\theta^{2i\theta})}{(1-r\theta^{i\theta})^{n+1}} d\theta \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(q+1)} r^{2+2} \int_{-\pi}^{\pi} \theta^{iq\theta}(1-\theta^{2i\theta}) d\theta = 2\pi r^2, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{s \rightarrow 0} I_2 = \frac{1}{2i} \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 (1-s^2) s^{2n-3} ds = \frac{1}{2ni}.$$

综合这些结果, 即得

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n y_n}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^{n-1} \frac{\beta+n\alpha}{n(\alpha+\beta)} \right]. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (x_n-1)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{i}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n y_n}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &\quad - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n \dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} \end{aligned}$$

以及
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n}{(1-\bar{u}_n)^n} \dot{u} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^{n-1},$$

即得第一个等式. 用证明引理 3.5.4 的方法即可证明另外两个等式成立.

引理 3.7.3 对 $i, j=1, 2, \dots, n, i+j < 2n$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n x_i x_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} &= -\frac{1}{4n} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^n \delta_{ij}, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n y_i y_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} &= -\frac{1}{4n} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^n \delta_{ij}. \end{aligned}$$

证 由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n x_i x_j}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \frac{1}{4\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (u_i u_j + \bar{u}_i u_j + u_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \bar{u}_j)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}, \quad (3.7.2) \end{aligned}$$

当 $i \neq j$ 时, 利用证明引理 3.5.4 的方法, 易知上述积分为 0. 今设 $i = j < n$, 不妨设 $i = j = 1$. 用证明引理 3.5.4 的方法可得

$$\int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n u_1^2 \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} = 0, \quad \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n \bar{u}_1^2 \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} = 0, \quad (3.7.3)$$

而

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n |u_1|^2 \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} |v_1|^2 \dot{v} \left\{ 2\operatorname{Re} \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{r e^{i\theta} d\theta}{(1 - r e^{i\theta})^{n+1}} \right\} \\ &\quad + \int_{v\bar{v}' > \frac{\varepsilon}{\alpha}} |v_1|^2 \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r e^{i\theta} d\theta}{(1 - r e^{i\theta})^{n+1}} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

显然 $I_2 = 0$. I_1 的内层积分

$$2\operatorname{Re} \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{r e^{i\theta} d\theta}{(1 - r e^{i\theta})^{n+1}} = \frac{2}{n} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{(1 + r e^{-i\theta})^n} - \frac{1}{(1 - r e^{i\theta})^n} \right\},$$

因而 $I_1 = \operatorname{Im}(J_n - H_n)$, 这里

$$J_n = \frac{2}{n} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{|v_1|^2 \dot{v}}{(1 + r e^{-i\theta})^n}, \quad H_n = \frac{2}{n} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{|v_1|^2 \dot{v}}{(1 - r e^{i\theta})^n}.$$

在引理 3.5.5 中已经证明

$$\lim_{s \rightarrow 0} J_n = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \operatorname{Im}(H_n) = -\frac{\pi^n}{n\Gamma(n)} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n,$$

即
$$\lim_{s \rightarrow 0} I_1 = -\frac{\pi^n}{n\Gamma(n)} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n,$$

所以
$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n |u_1|^2 \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} = -\frac{\pi^n}{n\Gamma(n)} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n. \quad (3.7.4)$$

把 (3.7.3), (3.7.4) 代入 (3.7.2) 得

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n x_1^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = -\frac{1}{4n} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^n.$$

把 x_1 换成 x_j ($j = 2, \dots, n-1$), 上式也成立. 这就证明了第一个等式. 用完全相同的方法可以证明第二个等式.

引理 3.7.4

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = -\frac{1}{2n},$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n y_n^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = -\frac{1}{2n}.$$

证 先证第一个等式. 因为

$$\left| \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{|1 - \bar{u}_n|^{n+1}},$$

故积分 $\int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}$ 存在, 因而

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}. \quad (3.7.5)$$

另一方面, 假定 z 在满足条件 (3.3.1) 下趋于 p_n (这个条件可以代之以 K 极限, 如前所述), 那末

$$\lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}. \quad (3.7.6)$$

比较 (3.7.5), (3.7.6) 得

$$\lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}. \quad (3.7.7)$$

记

$$G(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(x_n - 1)^2}{(1 - z\bar{u}')^n} \dot{u},$$

则

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{4\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{u_n^2 + \bar{u}_n^2 + 4 - 4u_n - 4\bar{u}_n + 2u_n \bar{u}_n}{(1 - z\bar{u}')^n} \dot{u} \\ &= \frac{1}{4} \left(z_n^2 + 4 - 4z_n + \frac{2}{n} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_n} = \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{2} z_n - 1,$$

所以
$$\lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} = -\frac{1}{2n}.$$

代入 (3.7.7) 即得第一个等式. 用完全相同的方法可以证明

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n |1 - \bar{u}_n|^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = -\frac{1}{n}.$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n y_n^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n |1 - \bar{u}_n|^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &\quad - \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}, \end{aligned}$$

即得第二个等式的证明.

引理 3.7.5 对 $k, j = 1, 2, \dots, n, k+j < 2n$, 均有

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n x_k y_j}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = 0;$$

对 $j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1) y_j}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = 0.$$

证 由于

$$\int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n x_k y_j}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{4i} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (u_k u_j + \bar{u}_k \bar{u}_j - u_k \bar{u}_j - \bar{u}_k u_j)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u},$$

如果 $k \neq j$, 则易知上述积分为零. 今设 $k = j < n$, 则

$$\int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n x_k y_k}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{4i} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (u_k^2 - \bar{u}_k^2)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}.$$

利用证明引理 3.5.4 的方法, 容易证明这一积分也为零. 这就证明了第一个等式.

当 $j = 1, 2, \dots, n-1$ 时, 第二个等式成立是显然的. 当 $j = n$ 时, 由于

$$\left| \frac{\bar{u}_n (x_n - 1) y_n}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{|1 - \bar{u}_n|^{n-\frac{1}{2}}},$$

用证明引理 3.7.4 时同样的推理, 即知

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1) y_n}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_s} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1) y_n}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}. \end{aligned}$$

根据引理 3.5.2 和引理 3.7.1 即得

$$\lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u|=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1) y_n}{(1 - zu')^{n+1}} \dot{u} = \frac{1}{2ni} - \frac{1}{2ni} = 0.$$

故第二个等式也成立.

有了这些引理, 便可证明下面的

定理 3.7.1 设 f 是定义在 $|u| \leq 1$ 上的实函数, 有三阶连续偏导数, 那末

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_n} \frac{\bar{u}_n [f(u) - f(p_n)]}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}$$

存在, 且等于

$$c_n \frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n} + \left(\frac{1}{n} - 2c_n d_n + o_n \right) \frac{\partial f(p_n)}{\partial \bar{u}_n} \\ - \frac{o_{n+1}}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_j \partial \bar{u}_j} - \frac{1}{n} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_n \partial \bar{u}_n} + I,$$

这里
$$c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1}, \quad d_n = \frac{\beta + n\alpha}{n(\alpha + \beta)},$$

I 是一个确定的数.

证 由 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n) &= f(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \\ &= f(p_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f(p_n)}{\partial x_j} x_j + \frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n} (x_n - 1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(p_n)}{\partial y_j} y_j \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial x_n} x_i (x_n - 1) \right. \\ &\quad + \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_n^2} (x_n - 1)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i \partial x_n} y_i (x_n - 1) \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial y_j} x_i y_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j \right\} + R_3(u), \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

这里 $R_3(u)$ 是三阶余项, 显然

$$R_3(u) = O(|1 - \bar{u}_n|^{3/2}),$$

故积分 $\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|\bar{u}'|=1} \frac{\bar{u}_n R_3(u)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}$ 存在, 记它的值为 I . 由 (3.7.8) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n [f(u) - f(p_n)]}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f(p_n)}{\partial x_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n x_j}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &+ \frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1) \dot{u}}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \\ &+ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(p_n)}{\partial y_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n y_j}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n x_i x_j}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \right. \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial x_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n x_i (x_n - 1)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &+ \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_n^2} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i \partial x_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n y_i (x_n - 1)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial y_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n x_i y_j}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &\left. + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n y_i y_j}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \right\} \\ &+ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n R_3(u)}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u}. \end{aligned}$$

根据引理 3.7.2, 3.7.3, 3.7.4, 3.7.5, 我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{e \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_e} \frac{\bar{u}_n [f(u) - f(p_n)]}{(1 - \bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\ &= \left[\frac{1}{2n} + c_n(1 - d_n) \right] \frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n} + \frac{1}{i} \left(\frac{1}{2n} - c_n d_n \right) \frac{\partial f(p_n)}{\partial y_n} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_j^2} \right) \left(-\frac{c_{n+1}}{2n} \right) \right. \\ &\left. - \frac{1}{2n} \left(\frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_n^2} \right) \right\} + I, \end{aligned}$$

整理以后,即得所要证的结果.

定理 3.7.2 f 如定理 3.7.1 所述, v 是球面上任一点, 那末极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon(v)} \frac{\bar{u}_k [f(u) - f(v)]}{(1 - v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

存在, 这里

$$\sigma_\varepsilon(v) = \{u \mid |v\bar{u}'| = 1, \alpha^2(1 - |v\bar{u}'|^2)^2 + 4\beta^2(\operatorname{Im}(v\bar{u}'))^2 > \varepsilon^2\}.$$

证 取酉方阵 U , 使 $vU = p_n$, 命 $u = w\bar{U}'$, 记 $\bar{U}' = (\alpha_{ij})$, 则

$$u_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} w_j,$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon(v)} \frac{\bar{u}_k [f(u) - f(v)]}{(1 - v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_{jk} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{w}_j [f(w\bar{U}') - f(p_n\bar{U}')] }{(1 - \bar{w}_n)^{n+1}} \dot{w} \\ &+ \bar{\alpha}_{nk} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{w}_n [f(w\bar{U}') - f(p_n\bar{U}')] }{(1 - \bar{w}_n)^{n+1}} \dot{w}. \quad (3.7.9) \end{aligned}$$

在上式右边第一项的和式中, 由于

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{w}_j}{(1 - \bar{w}_n)^{n+1}} \dot{w} = 0,$$

故有

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{w}_j [f(w\bar{U}') - f(p_n\bar{U}')] }{(1 - \bar{w}_n)^{n+1}} \dot{w} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\bar{w}_j f(w\bar{U}')}{(1 - \bar{w}_n)^{n+1}} \dot{w}. \end{aligned}$$

在定理 3.6.1 的证明中, 已经证明了上述极限存在, 由定理 3.7.1 知道 (3.7.9) 的右边的第二项极限存在.

称 (3.7.9) 的左边的极限为奇异积分

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|v\bar{u}'|=1} \frac{\bar{u}_k f(u)}{(1 - v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u}$$

的 Hadamard 主值, 记为

$$\begin{aligned}
 & P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\sigma_\varepsilon(v)} \frac{\bar{u}_k [f(u) - f(v)]}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u}.
 \end{aligned}$$

从定理 3.7.1 可得如下的

定理 3.7.3 f 如定理 3.7.1 所述, 那末

$$\begin{aligned}
 & \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n f(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
 &= P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n f(u)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} - c_n \frac{\partial f(p_n)}{\partial \bar{u}_n} \\
 &\quad - (c_n - 2c_n d_n) \frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n} + \frac{c_{n+1}}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_j \partial \bar{u}_j},
 \end{aligned}$$

这里 z 在条件 (3.3.1) 之下趋于 p_n (条件 (3.3.1) 可以如前面所讨论的那样, 是可以去掉的而代之以 K 极限).

证 由分解式 (3.7.8) 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n f(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
 &= \frac{f(p_n)}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f(p_n)}{\partial x_i} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n x_i \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &\quad + \frac{\partial f(p_n)}{\partial x_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1) \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(p_n)}{\partial y_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n y_j \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n x_i x_j \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \right. \\
 &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial x_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{x_i (x_n - 1) \bar{u}_n \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_n^2} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n (x_n - 1)^2 \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i \partial x_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_n y_i (x_n - 1) \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial x_i \partial y_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{v}_n x_i y_j}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
& + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{v}_n y_i y_j \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \Big\} \\
& + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{v}_n R_3(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u}.
\end{aligned}$$

因为 $R_3(u) = O(|1-\bar{v}_n|^{\frac{3}{2}})$,

前已证明 $|1-z\bar{u}'| \geq \frac{1}{M+1} |1-\bar{v}_n|$,

所以 $\left| \frac{\bar{v}_n R_3(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \right| \leq \frac{K}{|1-\bar{v}_n|^{n-\frac{1}{2}}}$,

此处 K 为常数. 由 Lebesgue 定理,

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{v}_n R_3(u)}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
& = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{v}_n R_3(u)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} = I.
\end{aligned}$$

由引理 3.5.1, 3.5.2 及 3.7.1, 即得

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{v}_n f(u) \dot{u}}{(1-z\bar{u}')^{n+1}} \\
& = I + \frac{1}{n} \frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n} - \frac{1}{n} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_n \partial \bar{u}_n}. \quad (3.7.10)
\end{aligned}$$

但由定理 3.7.1 得

$$\begin{aligned}
I &= P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{v}_n f(u)}{(1-\bar{u}_n)^{n+1}} \dot{u} \\
&= c_n \frac{\partial f(p_n)}{\partial \bar{u}_n} - \left(\frac{1}{n} - 2c_n d_n + c_n \right) \frac{\partial f(p_n)}{\partial u_n} \\
&+ \frac{c_{n+1}}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_j \partial \bar{u}_j} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 f(p_n)}{\partial u_n \partial \bar{u}_n},
\end{aligned}$$

代入 (3.7.10), 即得所要证的.

现在可以证明我们的主要结果

定理 3.7.4 设 f 如定理 3.7.1 所述, $F(z)$ 是 f 在超球上的 Cauchy 型积分. v 是超球面 $u\bar{u}'=1$ 上任一点, 如果 z 从超球内部在条件 (3.3.1) 之下趋于 v , 那末

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow v} \frac{\partial F(z)}{\partial z} = & P \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{|u|=1} \frac{\bar{u} f(u) \dot{u}}{(1 - \bar{v} u')^{n+1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \\ & \times \left\{ \frac{\partial f(v)}{\partial u} \left[\frac{2\beta}{\alpha + \beta} I - n \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \bar{v}' \bar{v} \right] - n \frac{\partial f(v)}{\partial \bar{u}} \bar{v}' \bar{v} \right. \\ & \left. + \frac{2\beta}{\alpha + \beta} \bar{v} \left[t_r \left(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u \partial \bar{u}} \right) - v \frac{\partial^2 f(v)}{\partial u \partial \bar{u}} \bar{v}' \right] \right\}, \quad (3.7.11) \end{aligned}$$

这里

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad v = (v_1, \dots, v_n),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \bar{u}_n} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial \bar{u}_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial \bar{u}_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u_n \partial \bar{u}_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial u_n \partial \bar{u}_n} \end{pmatrix}.$$

如同前面那样, 条件(3.3.1)是可以去掉的而代之以 K 极限.

证 显然

$$\lim_{z \rightarrow v} \frac{\partial F(z)}{\partial z_k} = \lim_{z \rightarrow v} \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{|u|=1} \frac{\bar{u}_k f(u)}{(1 - \bar{z} u')^{n+1}} \dot{u}.$$

和前面的做法一样, 取酉方阵 U , 使 $vU = p_n$, 若记 $\bar{U}' = (\alpha_{ij})$, 则 $v_k = \alpha_{nk} (k=1, 2, \dots, n)$, 作变换 $u = w \bar{U}'$, 则

$$u_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} w_j,$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow v} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|u|=1} \frac{\bar{u}_k f(u)}{(1 - \bar{z} u')^{n+1}} \\ = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{jk} \lim_{\zeta \rightarrow p_n} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{|w|=1} \frac{\bar{w}_j f(w \bar{U}')}{(1 - \bar{\zeta} w')^{n+1}} \dot{w}. \end{aligned}$$

由定理 3.6.1, 定理 3.7.3, 上式右边等于

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\alpha}_{jk} \left\{ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_j f(w\bar{U}') \dot{w}}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}} + \frac{c_{n+1}}{n} \frac{\partial f(p_n \bar{U}')}{\partial w_j} \right\} \\
& + \bar{\alpha}_{nk} \left\{ P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_n f(w\bar{U}') \dot{w}}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}} - \frac{\partial f(p_n \bar{U}')}{\partial \bar{w}_n} - c_n \right. \\
& \left. - (c_n - 2c_n d_n) \frac{\partial f(p_n \bar{U}')}{\partial w_n} + \frac{c_{n+1}}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n \bar{U}')}{\partial w_j \partial \bar{w}_j} \right\} \\
& = \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{jk} P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w\bar{w}'=1} \frac{\bar{w}_j f(w\bar{U}') \dot{w}}{(1-\bar{w}_n)^{n+1}} + \frac{c_{n+1}}{n} \\
& \times \sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{jk} \frac{\partial f(p_n \bar{U}')}{\partial w_j} - \bar{\alpha}_{nk} \left(c_n - 2c_n d_n + \frac{c_{n+1}}{n} \right) \frac{\partial f(p_n \bar{U}')}{\partial w_n} \\
& - \bar{\alpha}_{nk} c_n \frac{\partial f(p_n \bar{U}')}{\partial \bar{w}_n} + \frac{c_{n+1}}{n} \bar{\alpha}_{nk} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f(p_n \bar{U}')}{\partial w_j \partial \bar{w}_j} \\
& = P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} + \frac{c_{n+1}}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_{jk} \alpha_{ji} \frac{\partial f(v)}{\partial u_i} \\
& - \bar{\alpha}_{nk} \left(c_n - 2c_n d_n + \frac{c_{n+1}}{n} \right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(v)}{\partial u_j} v_j - \bar{\alpha}_{nk} c_n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(v)}{\partial u_j} \bar{v}_j \\
& + \frac{c_{n+1}}{n} \bar{\alpha}_{nk} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(v)}{\partial u_j \partial \bar{u}_j} - \frac{c_{n+1}}{n} \bar{\alpha}_{nk} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(v)}{\partial u_i \partial \bar{u}_j} v_i \bar{v}_j \\
& = P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} + \frac{c_{n+1}}{n} \frac{\partial f(v)}{\partial u_k} \\
& - \bar{\alpha}_{nk} \left\{ \left(c_n - 2c_n d_n + \frac{c_{n+1}}{n} \right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(v)}{\partial u_j} v_j + c_n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(v)}{\partial \bar{u}_j} \bar{v}_j \right. \\
& \left. - \frac{c_{n+1}}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(v)}{\partial u_j \partial \bar{u}_j} + \frac{c_{n+1}}{n} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(v)}{\partial u_i \partial \bar{u}_j} v_i \bar{v}_j \right\},
\end{aligned}$$

把 $c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1}$, $c_n - 2c_n d_n + \frac{c_{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}$ 代

入上式, 并乘以 n , 即得 (3.7.11).

定理 3.7.5 设 $f = f_1 + i f_2$ 是定义在 $w\bar{u}' \leq 1$ 上的复函数, f_1, f_2 都有三阶连续偏导数, 设 $F(z)$ 是 f 在超球上的 Cauchy 型积分, v 是 $w\bar{u}' = 1$ 上任一点, 如果 z 从超球内部在条件 (3.3.1) 之下趋于 v , 那末 (3.7.11) 仍然成立. 这时定义

$$\begin{aligned}
& P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
& = P \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f_1(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
& \quad + P \frac{i}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}_k f_2(u) \dot{u}}{(1-v\bar{u}')^{n+1}}.
\end{aligned}$$

如同前面那样, 条件(3.3.1)是可以去掉的而代之以 K 极限.

在上述定理中, 如果取 $\alpha = \beta$, 则得较为简单形式的公式:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow v} \frac{\partial F(z)}{\partial z} &= P \frac{n}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u} f(u)}{(1-v\bar{u}')^{n+1}} \dot{u} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial f(v)}{\partial u} - \frac{n}{2} \frac{1}{v} \left\{ \frac{\partial f(v)}{\partial u} \bar{v}' - \frac{1}{n} t_r \left(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u \partial \bar{u}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n} v \left(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial u \partial \bar{u}} \right) \bar{v}' \right\}.
\end{aligned}$$

如果 $v_k = 0$, 即得定理 3.6.2.

第四章 Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分

§ 4.1 引 言

在绪论中已经提到, 华罗庚[1] 证明了圆型有界星形域, Cauchy 核是存在的. 所以对于在域的特征流形上可积的函数, 可以定义 Cauchy 型积分. 华罗庚[1] 还具体地给出了四类典型域的 Cauchy 核.

在这一章中, 我们将讨论第四类典型域 \mathscr{H}_{IV} 的 Cauchy 型积分. 本章的内容取自龚昇、孙继广[3], 龚昇、史济怀[4].

所谓第四类典型域 \mathscr{H}_{IV} , 是指 Lie 球双曲空间, 由满足

$$\begin{cases} 1 + |z A_0 z'|^2 - z \bar{z}' > 0, \\ 1 - |z A_0 z'| > 0, \end{cases}$$

而
$$A_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} I^{(N-2)}$$

的 $N (\geq 2)$ 个复元素矢量 $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ 所构成. \mathscr{H}_{IV} 的边界, 记为 \mathscr{B}_{IV} . 特别以 \mathscr{L}_{IV} 表示 \mathscr{H}_{IV} 的特征流形. 此外, $N (\geq 2)$ 个复变数 z_1, \dots, z_N 空间中的域 \mathscr{H}_{IV}^* , \mathscr{D}_1 及 \mathscr{D}_2 , 分别指

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{IV}^*: & \begin{cases} 1 + |z A_0 z'|^2 - z \bar{z}' > 0, \\ 1 - |z A_0 z'| < 0; \end{cases} \\ \mathscr{D}_1: & \begin{cases} 1 + |z A_0 z'|^2 - z \bar{z}' < 0, \\ 1 - |z A_0 z'| > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{和} \quad \mathcal{D}_2: \quad \begin{cases} 1 + |z A_0 z'|^2 - z \bar{z}' < 0, \\ 1 - |z A_0 z'| < 0. \end{cases}$$

\mathcal{R}_{IV}^* 的边界, 记为 \mathcal{B}_{IV}^* , 而 \mathcal{L}_{IV} 同时也是 \mathcal{R}_{IV}^* 的特征流形.

若 $\varphi(\xi)$ 是 \mathcal{L}_{IV} 上的连续函数, 则当 $z \in \mathcal{R}_{IV}$ 或 $z \in \mathcal{R}_{IV}^*$ 时, Cauchy 型积分

$$V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(z, \xi) \varphi(\xi) \xi \quad (4.1.1)$$

是存在的 (华罗庚[1]), 此处 $H_{IV}(z, \xi)$ 表示 Cauchy 核

$$(1 + z A_0 z' \overline{\xi A_0 \xi'} - z \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}},$$

$V(\mathcal{L}_{IV})$ 是 \mathcal{L}_{IV} 的体积, ξ 表示 \mathcal{L}_{IV} 的体积元素.

但当 $z \in \mathcal{D}_1$ 或 \mathcal{D}_2 , 而 $N > 2$ 时, Cauchy 核 $H_{IV}(z, \xi)$ 失去意义, 因而 Cauchy 型积分 (4.1.1) 不复存在. 事实上, 任与一点 $z \in \mathcal{D}_1$ (或 \mathcal{D}_2), 必有分解式 $z = e^{i\theta}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0$, 其中 $0 \leq \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ (当 $z \in \mathcal{D}_2$ 时, $0 < \lambda_1$),

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \div \sqrt{2} I^{(N-2)},$$

Γ 为一实正交方阵. 对所与之点 z , 我们取 \mathcal{L}_{IV} 上的点

$$\xi = e^{i\theta} \left(\frac{1 + \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, 0, \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2}, 0, \dots, 0 \right) P_0 (P_0^{-1} \Gamma P_0),$$

则 $1 + z A_0 z' \overline{\xi A_0 \xi'} - z \bar{\xi}' = 0$. (当 $N=2$ 时, \mathcal{R}_{IV} 即双圆柱: $|z_1| < 1, |z_2| < 1$; \mathcal{R}_{IV}^* , \mathcal{D}_1 及 \mathcal{D}_2 分别为 $|z_1| > 1, |z_2| > 1$; $(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) < 0, |z_1 z_2| < 1$; $(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) < 0, |z_1 z_2| > 1$. 与之相应的 Cauchy 型积分的问题, 实即为双圆柱的 Cauchy 型积分的问题, 参阅 Какнчев[1].)

在这一章中, 首先研究 \mathcal{R}_{IV} 的 Cauchy 型积分 (4.1.1). 在定义了 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 上的 Cauchy 主值之后, 我们证明了: 满足 Lipschitz 条件的函数, 在 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 上的 Cauchy 主值是存在的, 而且给出了从 \mathcal{R}_{IV} 的内部趋于 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 时, Cauchy 型积分的

极限值. 与第一章一样, 对于 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 上的点, 也可以有多种方法定义 Cauchy 主值. 所以 Cauchy 型积分的极限值, 当从 \mathcal{B}_{IV} 的内部趋于 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 时, 有多种表达形式. 我们还证明了: \mathcal{B}_{IV} 上的任一 B -调和函数在 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 上的值, 必可用它的 B -调和共轭函数在 \mathcal{L}_{IV} 上的值通过积分表出.

至于当 z 从 \mathcal{B}_{IV} 的内部趋于 \mathcal{L}_{IV} 时, 有这样的结果: 当 $N = 2n (n \geq 1)$ 时, 如果 $\varphi(\xi) = \varphi(e^{i\theta} x p_0) = \varphi_0(e^{i\theta})$ 对 $e^{i\theta}$ 具有 $n-1$ 阶连续微商, 并且它对 $e^{i\theta}$ 的 k 阶微商 ($0 \leq k \leq n-1$) 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\text{Lip } p (0 < p \leq 1)$; 当 $N = 2n+1 (n \geq 1)$ 时, 如果 $\varphi(\xi) = \varphi(e^{i\theta} x p_0) = \varphi_0(e^{i\theta})$ 对 $e^{i\theta}$ 具有 $n+1$ 阶连续微商, 并且它对 $e^{i\theta}$ 的 k 阶微商 ($0 \leq k \leq n+1$) 在 \mathcal{L}_{IV} 上连续, 则 Cauchy 型积分 (4.1.1) 在 \mathcal{L}_{IV} 上的极限值是存在的, 且表达形式是唯一的.

利用解析变换 $w = (z A_0 z')^{-1} z (z \in \mathcal{B}_{IV}, w \in \mathcal{B}_{IV}^*)$, 不难得到 \mathcal{B}_{IV}^* 上的 Cauchy 型积分的相应的结果.

在讨论中所用到的有关 \mathcal{B}_{IV} 的已知事实 (例如 \mathcal{B}_{IV} 的运动群 I^{IV} , 原点的固定分群 I_0^{IV} 等等), 可参阅华罗庚 [1].

§ 4.2 二 条 引 理

根据 Cauchy 积分公式, 我们有

$$V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(z, \xi) \dot{\xi} = 1, \quad (4.2.1)$$

其中

$$z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathcal{B}_{IV},$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) = e^{i\theta} x p_0 \in \mathcal{L}_{IV},$$

$$xx' = 1, \quad \dot{\xi} = 2^{\frac{N}{2}} d\theta \cdot \dot{x}.$$

特别取 $z = (0, \rho, 0, \dots, 0)$, $0 \leq \rho < 1$, 有 $z A_0 z' = 0$, 于是

$$1 = V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \rho \bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}} \dot{\xi}$$

$$= 2^{\frac{N}{2}} V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{xy'=1} \dot{x} \int_0^\pi (1 - \rho e^{-i\theta} (x_1 + ix_2))^{-\frac{N}{2}} d\theta,$$

作变换 $y_1 + iy_2 = e^{-i\theta} (x_1 + ix_2)$, $y_3 = x_3, \dots, y_N = x_N$, $\theta = \theta$, 则有

$$\begin{aligned} 1 &= 2^{\frac{N}{2}} V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{yy'=1} (1 - \rho(y_1 + iy_2))^{-\frac{N}{2}} \dot{y} \int_0^\pi d\theta \\ &= \omega_{N-1}^{-1} \int_{yy'=1} (1 - \rho(y_1 + iy_2))^{-\frac{N}{2}} \dot{y}, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

此处 $\omega_{N-1} = 2^{-\frac{N}{2}} \pi^{-1} V(\mathcal{L}_{IV}) = 2\pi^{\frac{N}{2}} / \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)$ 是 $yy'=1$ 的体积.

我们来证明如下的二条引理.

引理 4.2.1 设 $y = (y_1, \dots, y_N)$, $yy'=1$, 则

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_{N-1}^{-1} \int_{\substack{yy'=1 \\ \alpha^2(1-y_1)^2 + \beta^2 y_2^2 > \epsilon^2}} (1 - (y_1 + iy_2))^{-\frac{N}{2}} \dot{y}$$

是存在的, 且等于 $1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{N}{2}-1}$, 这里 ω_{N-1} 为 $yy'=1$ 的体积, \dot{y} 为 $yy'=1$ 的体积元素.

证 当 $N=2$ 时, 引理的结论是复变数函数论中熟知的事实. 当 $N=2n$ 时, 即为引理 1.6.1, 因此, 只需讨论 $N=2n+1$, $n \geq 1$ 的情形.

由 (4.2.2), 只要证明

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\omega_{2n}} \int_{\substack{yy'=1 \\ \alpha^2(1-y_1)^2 + \beta^2 y_2^2 < \epsilon^2}} \frac{\dot{y}}{(1 - (y_1 + iy_2))^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

命 $y_1 + iy_2 = r e^{i\varphi}$, $v = (y_3, \dots, y_{2n+1})$, 如同引理 1.6.1 的证明那样可得

$$I = \frac{1}{\omega_{2n}} \int_{vv' < \frac{2\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}} \dot{v} \int_{-\pi}^\pi \frac{d\varphi}{(1 - \rho r e^{i\varphi})^{n+\frac{1}{2}}},$$

这里

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{t - \sqrt{(1-t)(t+r^2(1-2t)) + (2t-1)s^2}}{r(2t-1)},$$

$$t = \alpha^2, \quad 1-t = \beta^2.$$

如果 $\alpha \neq \beta$;

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{1+r^2-s^2}{2r},$$

如果 $\alpha = \beta$. 记

$$J = \int_{-a}^a (1 - \rho r e^{i\varphi})^{-\frac{N}{2}} d\varphi = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + p\right)}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_{-a}^a (\rho r)^p e^{ip\varphi} d\varphi$$

$$= 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + p\right)}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} (\rho r)^p \frac{\sin pa}{p} + 2a$$

$$= 2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + p\right)}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \frac{(\rho r e^{ia})^p}{p} \right\} + 2a.$$

令 $1-x=y^2$, 易知

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + p\right) x^{p-1}}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} &= \frac{1-y^N}{(1-y^2)y^N} = \frac{1+y+y^2+\cdots+y^{N-1}}{(1+y)y^N} \\ &= \frac{1}{(1+y)y} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^5} + \cdots + \frac{1}{y^{2n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1-x)^{k+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}, \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + p\right) x^p}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)p} &= \int_0^x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + p\right) x^{p-1}}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)(1-x)^{k-\frac{1}{2}}} + 2 \log \frac{2}{1+\sqrt{1-x}} - 2, \end{aligned}$$

所以

$$J = 2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)(1 - \rho r e^{ia})^{k - \frac{1}{2}}} + 2 \log \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho r e^{ia}}} \right\} + 2a.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{vv' < g(s)} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)(1 - \rho r e^{ia})^{k - \frac{1}{2}}} + 2 \log \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho r e^{ia}}} \right\} \dot{v} + \frac{2a}{\omega_{N-1}} \int_{vv' < g(s)} \dot{v} \\ &= \frac{2}{\omega_{N-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^n L_k + L_0 \right\} + L_*, \end{aligned}$$

其中

$$L_* = \frac{2a}{\omega_{N-1}} \int_{vv' < g(s)} \dot{v} = O(s^{\frac{N}{2}}),$$

$$L_k = \int_{vv' < g(s)} \frac{\dot{v}}{\left(k - \frac{1}{2}\right)(1 - \rho r e^{ia})^{k - \frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$L_0 = 2 \int_{vv' < g(s)} \log \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho r e^{ia}}} \dot{v},$$

这里 $g(s)$ 当 $\alpha = \beta$ 时为 $2s - s^2$; 当 $\alpha \neq \beta$ 时为 $\frac{2s}{\sqrt{t}} - \frac{s^2}{t}$. 应用引理 1.6.1 的证明方法, 易得

$$\lim_{s \rightarrow 1} L_k = O(s^{n-k}), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\operatorname{Im} L_0 = O(1) \quad (s \rightarrow 0).$$

现在分别对 $\alpha = \beta$ 及 $\alpha \neq \beta$ 的二种情形来讨论 L_n . 先讨论 $\alpha = \beta$ 的情形.

由 a 的定义知

$$r e^{ia} = \frac{2 - vv' - s^2}{2} + \frac{i}{2} (2s^2(2 - vv') - (vv')^2 - s^4)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$L_n = \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \int_{vv' < 2\varepsilon - \varepsilon^2} \frac{1}{\left\{ \left[1 - \rho + \rho \frac{vv' + \varepsilon^2}{2} - \frac{i\rho}{2} (2\varepsilon^2(2 - vv') - (vv')^2 - \varepsilon^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{n - \frac{1}{2}} \right\}}.$$

用球坐标 $y_3 = s \cos \varphi_1$, $y_4 = s \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$, \dots , $y_{2n+1} = s \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{2n-2}$, 其中 $1 - r^2 = v\bar{v}'$, 则

$$L_n = \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \times \int_0^{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} \frac{s^{2n-2} ds}{\left(1 - \rho + \rho \frac{s^2 + s^2}{2} - \frac{i\rho}{2} \sqrt{2\varepsilon^2(2 - s^2) - s^4 - \varepsilon^4}\right)^{n - \frac{1}{2}}},$$

当 $\varepsilon > 0$ 固定时, 同引理 1.2.1 的证明一样, 可应用 Lebesgue 定理, 得到

$$J_n = \lim_{\rho \rightarrow 1} L_n = \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \times \int_0^{\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}} \frac{s^{2n-2} ds}{\left(\frac{s^2 + s^2}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 - (s^2 + s^2)^2}\right)^{n - \frac{1}{2}}}.$$

记 $\eta = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}$, $s = \eta R$, 于是

$$J_n = \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \times \int_0^1 \frac{R^{2n-2} dR}{\left(\frac{R^2 + \varepsilon^2 \eta^{-2}}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{4\eta^{-4} \varepsilon^2 - (R^2 + \varepsilon^2 \eta^{-2})^2}\right)^{n - \frac{1}{2}}}.$$

再应用 Lebesgue 定理, 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_n &= \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{R^{2n-2} dR}{\left(\frac{R^2}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{1-R^4}\right)^{n-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{2n-1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{t^{n-\frac{3}{2}} dt}{(t - i\sqrt{1-t^2})^{n-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta} \cos^{n-\frac{3}{2}} \theta \sin \theta d\theta.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\frac{3}{2}} \theta \sin \theta e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta} d\theta \\
&= \frac{-e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta} \cos^{n-\frac{1}{2}} \theta}{n - \frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\frac{1}{2}} \theta e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{n - \frac{1}{2}} + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\frac{1}{2}} \theta e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta} d\theta.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_n) &= \frac{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\frac{1}{2}} \theta \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\
&= \frac{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\pi^{n+\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

由上可知, 当 $\alpha = \beta$ 时,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} I = \frac{2}{\omega_{N-1}} \cdot \frac{\pi^{n+\frac{1}{2}}}{2\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{2\pi^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

再讨论 $\alpha \neq \beta$ 的情形.

由 α 的定义知

$$re^{i\alpha} = \frac{t-Q}{2t-1} + i \frac{\sqrt{r^2(2t-1)t-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}}{|2t-1|},$$

此处 $Q = \sqrt{(1-t)(t+r^2(1-2t)) + (2t-1)\varepsilon^2}$,

于是

$$L_n = \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \int_{\rho \sqrt{r} < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}} \left[1 - \rho \frac{t-Q}{2t-1} - i \frac{\sqrt{r^2(2t-1)t-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}}{|2t-1|} \right]^{-n+\frac{1}{2}} \rho.$$

如前那样, 由 Lebesgue 定理, 用球坐标, 可得

$$J_n = \lim_{\rho \rightarrow 1} L_n = \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \times \int_0^{\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{t+Q-1}{2t-1} - i \frac{\sqrt{t(2t-1)(1-s^2)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}}{|2t-1|} \right]^{-n+\frac{1}{2}} s^{2n-2} ds.$$

记 $\eta = \left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{t}} - \frac{\varepsilon^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad s = \eta R,$

则

$$J_n = \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \int_0^1 \left[\frac{t+Q-1}{2t-1} - i \frac{\sqrt{t(2t-1)(1-\eta^2 R^2)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt}}{|2t-1|} \right]^{-n+\frac{1}{2}} \eta^{2n-1} R^{2n-2} dR.$$

如引理 1.6.1 中所证,

$$\eta^{-2} \frac{t-1+Q}{2t-1} = \frac{R^2}{2} + O(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^{-2}}{|2t-1|} \{t(2t-1)(1-\eta^2 R^2)-t-(2t-1)\varepsilon^2+2Qt\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} (1-R^2)^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} J_n &= \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{R^{2n-2} dR}{\left[R^2 - i\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-R^2}\right]^{n-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)} \int_0^1 \frac{u^{n-\frac{3}{2}} du}{\left[u - i\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-u^2}\right]^{n-\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{2n-1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{3}{2}} \theta \sin \theta d\theta}{(\cos \theta - ib \sin \theta)^{n-\frac{1}{2}}} \\
&\quad \left(b = \sqrt{\frac{t}{1-t}}\right).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^{n-\frac{3}{2}} \theta \sin \theta}{(\cos \theta - ib \sin \theta)^{n-\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{i} \frac{1}{(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \\
&\times \frac{(e^{2i\theta} + 1)^{n-\frac{3}{2}} (e^{2i\theta} - 1)}{(1 + de^{2i\theta})^{n-\frac{1}{2}}} \quad \left(d = \frac{1-b}{1+b}\right),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} J_n &= \frac{1}{i(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2i\theta} - 1)(e^{2i\theta} + 1)^{n-\frac{3}{2}}}{(1 + de^{2i\theta})^{n-\frac{1}{2}}} d\theta \\
&= \frac{1}{i(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2i\theta} - 1)(1 + \xi e^{2i\theta})^{n-\frac{3}{2}}}{(1 + de^{2i\theta})^{n-\frac{1}{2}}} d\theta \\
&= \frac{1}{i(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(n - \frac{1}{2} + q - 1\right) \cdots \left(n - \frac{1}{2} - p\right)}{p! q!} \\
&\quad \cdot (-1)^q d^q \frac{\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots (n - p + 1)}{p!} e^{2i(p+q)\theta} \xi^p (e^{2i\theta} - 1) d\theta \\
&= \text{实数} + i \cdot \frac{1}{(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Im} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} J_n = \frac{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(1+b)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

最后得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I = \frac{2}{\omega_{N-1}} \cdot \frac{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(1+b)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} \right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

这就证明了引理 4.2.1.

引理 4.2.2 设 $y = (y_1, \dots, y_N)$, $yy' = 1$, 则

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{N-1}^{-1} \int_{yy'=1-(y|yy'=1, 1-y_1 < \alpha\varepsilon, |y_2| < \beta\varepsilon)} (1-(y_1+iy_2))^{-\frac{N}{2}} \dot{y}$$

是存在的, 且等于

$$1 - \frac{2^{\frac{N}{2}-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt \right\},$$

这里 ω_{N-1} 为 $yy' = 1$ 的体积, \dot{y} 为 $yy' = 1$ 的体积元素.

当 $N = 2n$ 时, 即为引理 1.8.1, 而当 $N = 2n+1$, $n \geq 1$ 时, 可以参照引理 4.2.1 的方法同样证明之. 从略.

§ 4.3 在 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 上的 Cauchy 主值

在 \mathcal{L}_{IV} 上任与一函数 $\varphi(\xi)$, 如果对于 \mathcal{L}_{IV} 上任意两点 ξ 与 ξ^* 恒有

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)| = O((\xi - \xi^*) \overline{(\xi - \xi^*)}')^{\frac{p}{2}}), \quad (4.3.1)$$

$0 < p \leq 1$, 则称 $\varphi(\xi)$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\operatorname{Lip} p$.

定理 4.3.1 若 $\varphi(\xi)$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\operatorname{Lip} p$ ($0 < p \leq 1$), 则当 $\eta_0 = e^{i\theta_0}(t, 1, 0, \dots, 0)p_0^{-1} \Gamma p_0 \in \mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 时, Cauchy 主值

$$\text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \dot{\xi}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1 + \eta_0 A_0 \eta' A_0 \xi - \eta_0 \bar{\xi}'| > \varepsilon |1 - \eta_0 \bar{\xi}'|}} H_{IV}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi \quad (4.3.2)$$

是存在的, 其中 $z_0 = e^{i\theta_0}(t, 0, \dots, 0) P_0^{-1} I' P_0$. 特别地, 当

$$\eta_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

时, 有

$$\begin{aligned} & \text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1 - \bar{\xi}_2| > \varepsilon}} (1 - \bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \xi \\ &= \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

这里 $\xi^* = (e^{2i\theta}, 1, 0, \dots, 0)$.

证 (i) 首先取 $\eta_0 = (0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$.

当 $\xi = e^{i\theta} x P_0$, $0 \leq \theta < \pi$, $xx' = 1$, 取

$$\xi^* = (e^{2i\theta}, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{L}_{IV},$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1 - \bar{\xi}_2| > \varepsilon}} (1 - \bar{\xi}_2)^{\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \xi \\ &= \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1 - \bar{\xi}_2| > \varepsilon}} (1 - \bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi \\ &\quad + \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1 - \bar{\xi}_2| > \varepsilon}} (1 - \bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi^*) \xi = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

令

$$y_1 + iy_2 = e^{-i\theta}(x_1 + ix_2),$$

$$y_3 = x_3, \dots,$$

$$y_N = x_N,$$

由引理 4.2.1, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^{\frac{N}{2}} \pi}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{y_N=1 \\ |1-y_1-iy_2|>\varepsilon}} (1-y_1-iy_2)^{-\frac{N}{2}} y \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi((e^{i\theta}, 1, 0, \dots, 0)) d\theta. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

注意到

$$\begin{aligned} (\xi - \xi^*) \overline{(\xi - \xi^*)}' &= \xi \bar{\xi}' + \xi^* \bar{\xi}'^* - \xi \bar{\xi}'^* - \xi^* \bar{\xi}' \\ &= 4 - e^{2i\theta} \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 - e^{-2i\theta} \xi_1 - \xi_2 \\ &= 4 - e^{i\theta} (x_1 - ix_2) - e^{-i\theta} (x_1 + ix_2) \\ &\quad - e^{-i\theta} (x_1 + ix_2) - e^{i\theta} (x_1 - ix_2) \\ &= 2[2 - (y_1 - iy_2) - (y_1 + iy_2)] \\ &= 4(1 - y_1), \end{aligned}$$

所以有

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)| = O((\overline{(\xi - \xi^*)}' (\xi - \xi^*))^{\frac{p}{2}}) = O((1 - y_1)^{\frac{p}{2}}).$$

于是

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq K \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1-\xi_1|>\varepsilon}} \frac{(1-y_1)^{\frac{p}{2}}}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{N}{2}}} \xi \\ &\leq K \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1-y_1-iy_2|>\varepsilon}} \frac{\xi}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{N-p}{2}}} \\ &= K \int_{y^{(0)} y^{(N)} < 1} y^{(0)} \int_{|\alpha|>a} \frac{d\alpha}{|1-r e^{i\alpha}|^{\frac{N-p}{2}}}, \end{aligned}$$

此处 $y_1 + iy_2 = r e^{i\alpha}$, $y^{(0)} = (y_3, \dots, y_N)$, $a = \cos^{-1} \frac{1+r^2-\varepsilon^2}{2r}$.

当 $N \geq 5$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_{|\alpha|>a} \frac{d\alpha}{|1-r e^{i\alpha}|^{\frac{N-p}{2}}} &\leq \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{|1-r e^{i\alpha}|^{\frac{N-p}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{(1-r)^{\frac{N-p}{2}-2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{|1-r e^{i\alpha}|^2} = O((1-r^2)^{\frac{p}{2}+1-\frac{N}{2}}). \end{aligned}$$

利用球坐标, 令 $s = \sqrt{1-r^2}$, 可得

$$\begin{aligned} \int_{y(y^{(0)})' < 1} (1-r^2)^{\frac{p-N}{2}+1} \dot{y}^{(0)} &= O\left(\int_0^1 s^{N-3} \cdot s^{p+2-N} ds\right) \\ &= O\left(\int_0^1 s^{p-1} ds\right) = O(1) \quad (s \rightarrow 0). \end{aligned}$$

当 $N=4$ 时, 可按第一章 § 1.3 中的方法处理, 同样得到 $|I_1| = O(1) (s \rightarrow 0)$.

当 $N=3$ 时, 取球坐标

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos \theta_1, \quad y_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ y_3 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (0 \leq \theta_1 < \pi, \quad 0 \leq \theta_2 < 2\pi), \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} &\int_{\substack{yy' \approx 1 \\ |1-y_1-iy_2| > s}} \frac{\dot{y}}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{3-p}{2}}} \\ &= \iint_{\substack{0 \leq \theta_1 < \pi \\ 0 \leq \theta_2 < 2\pi \\ (1-\cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 > s^2}} \frac{\sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2}{[(1-\cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2]^{\frac{3-p}{4}}} \\ &= \iint_{\substack{\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi \\ 0 \leq \theta_2 < 2\pi \\ (1-\cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 > s^2}} + \iint_{\substack{0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta_2 < 2\pi \\ (1-\cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 > s^2}} = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

J_1 显然是有界的, 对于 J_2 , 只需估计

$$\psi(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta_2}{((1-\cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2)^\alpha},$$

此处 $\alpha = \frac{3-p}{4}$, $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4}$. 令 $\cos \theta_1 = x_1$, $\cos 2\theta_2 = x_2$, 则

$$\psi(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\cos s} \frac{dx_1}{(1-x_1)^\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left[(1-x_1) + (1+x_1) \frac{1+x_2}{2}\right]^\alpha \sqrt{1-x_2^2}}.$$

再令 $\frac{1+x_2}{2} = y$, 则

$$\psi(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\cos s} \frac{dx_1}{(1-x_1)^\alpha} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^2)} [(1-x_1) + (1+x_1)y]^\alpha}.$$

记
$$J_3 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^2)} [(1-x_1) + (1+x_1)y]^\alpha},$$

并取 $\lambda = \frac{4-p}{2}$, $\mu = \frac{4-p}{2-p}$, 显然有 $\lambda > 1$, $\mu > 1$, $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1$ 以及 $\frac{\lambda}{2} < 1$, $\alpha\mu > 1$, $2\alpha - \frac{1}{\mu} < 1$. 于是应用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \left(\int_0^1 \frac{dy}{(y(1-y^2))^{\frac{\lambda}{2}}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 \frac{dy}{((1-x_1) + (1+x_1)y)^{\alpha\mu}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ &= K_1 \left(\frac{1}{\alpha\mu-1} ((1-x_1) + (1+x_1)y)^{1-\alpha\mu} \Big|_1^0 \right)^{\frac{1}{\mu}} \\ &= K_2 \left(\frac{1}{(1-x_1)^{\alpha\mu-1}} - \frac{1}{2^{\alpha\mu-1}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \leq K_3 \frac{1}{(1-x_1)^{\alpha-\frac{1}{\mu}}}, \end{aligned}$$

其中 K_1, K_2, K_3 皆为绝对常数, 所以有

$$\psi(s) = O\left(\int_0^{\cos s} \frac{dx_1}{(1-x_1)^{2\alpha-\frac{1}{\mu}}}\right) = O(1),$$

因而 $|I_1| = O(1)$ ($s \rightarrow 0$) 对于 $N=3$ 时亦成立.

当 $N=2$ 时, 令 $y_1 = \cos \theta$, $y_2 = \sin \theta$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\substack{yy'=1 \\ |1-y_1-iy_2|>s}} \frac{y}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{2-p}{2}}} &= \int_{\substack{0<\theta<2\pi \\ 4\sin^2\frac{\theta}{2}>s^2}} \frac{d\theta}{\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2-p}{4}}} \\ &= O\left(\int_s^{\frac{\pi}{2}} \theta^{-1+\frac{p}{2}} d\theta\right) = O(1) \quad (s \rightarrow 0). \end{aligned}$$

于是, 当 $N \geq 2$ 时, $|I_1| = O(1)$ ($s \rightarrow 0$) 恒成立, 所以我们得到

$$\begin{aligned} \text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \xi \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1-\xi_2|>s}} (1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

必须指出, 上式右端第一项, 乃是通常积分

$$I = V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi.$$

事实上, 可写

$$\begin{aligned} I &= V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1-\xi_2| > \varepsilon}} (1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi \\ &\quad + V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1-\xi_2| < \varepsilon}} (1-\xi_2)^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi = I_1 + I_0, \end{aligned}$$

而

$$|I_0| \leq K \int_{\substack{|y|=1 \\ |1-y_1-iy_2| < \varepsilon}} \frac{y}{|1-y_1-iy_2|^{\frac{N-p}{2}}} \quad (K \text{ 为一常数}),$$

取球坐标 $y_1 = \cos \theta_1, y_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, y_N = \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{N-1}$ ($0 \leq \theta_1, \dots, \theta_{N-2} < \pi, 0 \leq \theta_{N-1} < 2\pi$), 则当 $N \geq 4$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I_0| &= O \left(\iint_{\substack{0 \leq \theta_1, \theta_2 < \pi \\ (1-\cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 < \varepsilon^2}} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\sin^{N-2} \theta_1 \sin^{N-2} \theta_2 d\theta_1 d\theta_2}{[(1-\cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2]^{\frac{N-p}{4}}} \right). \end{aligned}$$

利用第一章 § 1.4 中完全相同的计算, 可得

$$|I_0| = O \left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \theta_1^{-1+p} d\theta_1 \right) = O(\varepsilon^{\frac{p}{2}}).$$

当 $N=3$ 时, 应用本节估计 $|I_1|$ 的方法, 采用同样的符号, 易知有

$$\begin{aligned} |I_0| &= O \left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta_2}{((1-\cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2)^\alpha} \right) \\ &= O \left(\int_{\cos \sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{dx_1}{(1-x_1)^\alpha} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^2)} ((1-x_1) + (1+x_1)y)^\alpha} \right) \\ &= O \left(\int_{\cos \sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{dx_1}{(1-x_1)^{2\alpha-\frac{1}{\mu}}} \right) = O((1-\cos \sqrt{\varepsilon})^{1+\frac{1}{\mu}-2\alpha}) \\ &= O(\varepsilon^{1+\frac{1}{\mu}-2\alpha}), \end{aligned}$$

其中 $1 + \frac{1}{\mu} - 2\alpha > 0$.

当 $N=2$ 时, 令 $y_1 = \cos \theta$, $y_2 = \sin \theta$, 则

$$\begin{aligned} |I_0| &= O\left(\int_{\substack{0 < \theta < 2\pi \\ 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} < \varepsilon^2}} \frac{d\theta}{\left(4 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2-p}{4}}}\right) \\ &= O\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \theta_1^{-1+\frac{p}{2}} d\theta_1\right) = O(\varepsilon^{\frac{p}{2}}). \end{aligned}$$

总之, 我们有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_0 = 0$, 因而 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = I$. 即 (4.3.5) 就是 (4.3.3).

(ii) 在 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 上任取一点

$$\eta_0 = e^{i\theta_0}(t, 1, 0, \dots, 0)P_0^{-1}\Gamma P_0,$$

首先利用 Γ_0^{IV} 中的变换 $z = e^{i\theta_0} \tilde{z} P_0^{-1} \Gamma P_0$, 使 \mathcal{B}_{IV} 内的点

$$z = e^{i\theta_0}(t, \rho, 0, \dots, 0)P_0^{-1}\Gamma P_0$$

变为 $\tilde{z} = (t, \rho, 0, \dots, 0)$, 使 η_0 变为 $\tilde{\eta}_0 = (t, 1, 0, \dots, 0)$. 再利用 Γ^{IV} 中将 $\tilde{z}_0 = (t, 0, \dots, 0)$ 变为原点的变换 $w = \Phi(\tilde{z})$, 将 \tilde{z} 变为 $w = (0, \rho, 0, \dots, 0)$, 将 $\tilde{\eta}_0$ 变为 $\zeta_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$. 在 \mathcal{L}_{IV} 上, 上述变换为 $\xi = e^{i\theta_0} \tilde{\xi} P_0^{-1} \Gamma P_0$ 和 $\zeta = \Phi(\tilde{\xi})$.

由于在变换 $w = \Phi(\tilde{z})$ 下, 有

$$\begin{aligned} &1 + w A_0 w' \overline{\zeta A_0 \zeta'} - w \zeta' \\ &= \frac{(1 + \tilde{z} A_0 \tilde{z}' \overline{\tilde{\xi} A_0 \tilde{\xi}'} - \tilde{z} \tilde{\xi}') (1 + |\tilde{z}_0 A_0 \tilde{z}'_0|^2 - \tilde{z}_0 \tilde{\xi}'_0)}{(1 + \tilde{z} A_0 \tilde{z}' \tilde{z}_0 A_0 \tilde{z}'_0 - \tilde{z} \tilde{\xi}'_0) (1 + \tilde{z}_0 A_0 \tilde{z}'_0 \overline{\tilde{\xi} A_0 \tilde{\xi}'} - \tilde{z}_0 \tilde{\xi}')} \end{aligned}$$

(见下而的附注), 并注意到 $w A_0 w' = 0$, $\tilde{z}_0 A_0 \tilde{z}'_0 = 0$, $\tilde{z}_0 A_0 \tilde{\xi}'_0 = 0$, $\tilde{z}_0 \tilde{\xi}'_0 = \tilde{z}_0 \tilde{\xi}'_0 = i^2$, 于是有

$$1 - w \zeta' = (1 + \tilde{z} A_0 \tilde{z}' \overline{\tilde{\xi} A_0 \tilde{\xi}'} - \tilde{z} \tilde{\xi}') (1 - \tilde{z}_0 \tilde{\xi}'_0)^{-1}.$$

令 $w \rightarrow \zeta_0$, 相应地 $\tilde{z} \rightarrow \tilde{\eta}_0$, 便得到

$$|1 - \zeta_0 \zeta'| = |1 + \tilde{\eta}_0 A_0 \tilde{\eta}'_0 \overline{\tilde{\xi} A_0 \tilde{\xi}'} - \tilde{\eta}_0 \tilde{\xi}'| / |1 - \tilde{z}_0 \tilde{\xi}'|.$$

因此,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V(\mathscr{L}_{\text{IV}})} \int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}} \frac{H_{\text{IV}}(z, \xi) \varphi(\xi) \xi}{|1 + \eta_0 A_0 \eta_0' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - \eta_0 \bar{\xi}'| > \varepsilon |1 - z_0 \bar{z}'|} \\
&= \frac{1}{V(\mathscr{L}_{\text{IV}})} \int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}} \frac{H_{\text{IV}}(\tilde{z}, \tilde{\xi}) \varphi(e^{i\theta_0} \tilde{\xi} P_0^{-1} \Gamma P_0) \tilde{\xi}}{|1 + \tilde{\eta}_0 A_0 \tilde{\eta}_0' \bar{\tilde{\xi}} A_0 \bar{\tilde{\xi}}' - \tilde{\eta}_0 \bar{\tilde{\xi}}'| > \varepsilon |1 - \tilde{z}_0 \bar{\tilde{z}}'|} \\
&\quad \times H_{\text{IV}}(\tilde{z}, \tilde{\xi}) \varphi(e^{i\theta_0} \tilde{\xi} P_0^{-1} \Gamma P_0) \tilde{\xi} \\
&= \frac{1}{V(\mathscr{L}_{\text{IV}})} \int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}} \frac{\varphi(e^{i\theta_0} \Phi^{-1}(\zeta) P_0^{-1} \Gamma P_0) (1 - \tilde{\xi} \bar{\tilde{z}}_0)^{\frac{N}{2}}}{|1 - \zeta_0 \bar{\zeta}'| > \varepsilon} \\
&\quad \times (1 - \tilde{z} \bar{\tilde{z}}_0)^{-\frac{N}{2}} (1 - w \bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}} \zeta.
\end{aligned}$$

再在上式中令 $z \rightarrow \eta_0$, 相应地, $\tilde{z} \rightarrow \tilde{\eta}_0$, $w \rightarrow \zeta_0$, 并记

$$\begin{aligned}
\psi(\zeta) &= \varphi(e^{i\theta_0} \Phi^{-1}(\zeta) P_0^{-1} \Gamma P_0) (1 - \Phi^{-1}(\zeta) \bar{\tilde{z}}_0)^{\frac{N}{2}} \\
&\quad \times (1 - \tilde{\eta}_0 \bar{\tilde{z}}_0)^{-\frac{N}{2}},
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{V(\mathscr{L}_{\text{IV}})} \int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}} \frac{H_{\text{IV}}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi}{|1 + \eta_0 A_0 \eta_0' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - \eta_0 \bar{\xi}'| > \varepsilon |1 - z_0 \bar{z}'|} \\
&= \frac{1}{V(\mathscr{L}_{\text{IV}})} \int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}} \frac{(1 - \zeta_0 \bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}} \psi(\zeta) \zeta}{|1 - \zeta_0 \bar{\zeta}'| > \varepsilon}.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 由于 $\psi(\zeta)$ 显然在 \mathscr{L}_{IV} 上满足 $\text{Lip } p$, 所以由 (i) 可知

$$\text{v. p. } \frac{1}{V(\mathscr{L}_{\text{IV}})} \int_{\mathscr{L}_{\text{IV}}} H_{\text{IV}}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi$$

是存在的, 而且不难求出与 (4.3.3) 相似的表达式. 此处从略.

附注 我们可以在 I^{IV} 中取出一个将 $z_0 \in \mathscr{B}_{\text{IV}}$ 变至原点的变换 $w = \Phi(z)$, $w, z \in \mathscr{B}_{\text{IV}}$, 相应地, $\zeta = \Phi(\xi)$, $\zeta, \xi \in \mathscr{B}_{\text{IV}}$, 使得经过这个变换, 有

$$\begin{aligned}
& 1 + w A_0 w' \bar{\zeta} A_0 \bar{\zeta}' - w \bar{\zeta}' \\
&= \frac{(1 + z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z \bar{\xi}') (1 + |z_0 A_0 z_0'|^2 - z_0 \bar{z}_0')}{(1 + z A_0 z' \bar{z}_0 A_0 \bar{z}_0' - z \bar{z}_0') (1 + z_0 A_0 z_0' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z_0 \bar{\xi}')}.
\end{aligned}$$

(1) 事实上, I^{IV} 中将 $z_0 \in \mathscr{B}_{\text{IV}}$ 变至原点的变换可写为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+w A_0 w'}{2}, \frac{1-w A_0 w'}{2i}, w P_0^{-1} \right) \\ &= \rho_* \left(\frac{1+z A_0 z'}{2}, \frac{1-z A_0 z'}{2i}, z P_0^{-1} \right) \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

此处实方阵 $M = \begin{pmatrix} A^{(2)} & O^{(2,N)} \\ B^{(N,2)} & D^{(N)} \end{pmatrix}$

满足 $M \begin{pmatrix} I^{(2)} & \\ & -I^{(N)} \end{pmatrix} M' = \begin{pmatrix} I^{(2)} & \\ & -I^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (4.3.7)$

$$\rho_* = \left\{ \left[\left(\frac{1+z A_0 z'}{2}, \frac{1-z A_0 z'}{2i} \right) - z P_0^{-1} x'_0 \right] A \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}^{-1}, \quad (4.3.8)$$

$$x_0 = \frac{-1}{1 - |z_0 A_0 z'_0|^2} \left(\overline{(z_0 A_0 z'_0 - 1)} z_0 P_0^{-1} + (z_0 A_0 z'_0 - 1) \bar{z}_0 \bar{P}_0^{-1} \right),$$

我们特别取

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{1 + |z_0 A_0 z'_0|^2 - z_0 \bar{z}'_0}} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1 + z_0 A_0 z'_0 + z_0 A_0 \bar{z}'_0 + |z_0 A_0 z'_0|^2}, & 0 \\ \frac{i(z_0 A_0 z'_0 - \overline{z_0 A_0 z'_0})}{\sqrt{1 + z_0 A_0 z'_0 + z_0 A_0 \bar{z}'_0 + |z_0 A_0 z'_0|^2}}, & \frac{1 - |z_0 A_0 z'_0|^2}{\sqrt{1 + z_0 A_0 z'_0 + z_0 A_0 \bar{z}'_0 + |z_0 A_0 z'_0|^2}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

它满足 $AA' = (I - x_0 x'_0)^{-1}$. 于是由 (4.3.6), (4.3.7) 立知

$$\begin{aligned} & 1 + w A_0 w' \overline{\zeta A_0 \zeta'} - w \bar{\zeta}' \\ &= 2 \left(\frac{1+w A_0 w'}{2}, \frac{1-w A_0 w'}{2i}, w P_0^{-1} \right) \begin{pmatrix} I^{(2)} & \\ & -I^{(N)} \end{pmatrix} \\ & \quad \times \overline{\left(\frac{1+\zeta A_0 \zeta'}{2}, \frac{1-\zeta A_0 \zeta'}{2i}, \zeta P_0^{-1} \right)'} \\ &= \rho_* \bar{\rho}_* (1 + z A_0 z' \overline{\xi A_0 \xi'} - z \bar{\xi}'). \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

将 (4.3.9) 代入 (4.3.8) 中, 可算出

$$\rho_z = \frac{\sqrt{1 + |z_0 A_0 z'_0|^2 - z_0 \bar{z}'_0}}{1 + z A_0 z' \bar{z}_0 A_0 z'_0 - z \bar{z}'_0} \sqrt{\frac{1 + z_0 A_0 z'_0}{1 + z_0 A_0 z'_0}}.$$

相应地, 有

$$\rho_\xi = \frac{\sqrt{1 + |z_0 A_0 z'_0|^2 - z_0 \bar{z}'_0}}{1 + \xi A_0 \xi' \bar{z}_0 A_0 z'_0 - \xi \bar{z}'_0} \sqrt{\frac{1 + z_0 A_0 z'_0}{1 + z_0 A_0 z'_0}}.$$

代入 (4.3.10), 即得需要证明的.

附带指出, 在所取的变换之下, 由于

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (1 + |z_0 A_0 z'_0|^2 - z_0 \bar{z}'_0)^{\frac{N}{2}} |1 + \xi A_0 \xi' \bar{z}_0 A_0 z'_0 - \xi \bar{z}'_0|^{-N} \xi \\ &(\xi, \xi \in \mathcal{L}_{IV}), \end{aligned}$$

再利用已证的等式, 即得

$$\begin{aligned} (1 + w A_0 w' \bar{\xi} A_0 \xi' - w \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} \dot{\xi} &= (1 + z A_0 z' \bar{z}_0 A_0 z'_0 - z \bar{z}'_0)^{\frac{N}{2}} \\ &\times (1 + z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \xi' - z \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} (1 + \xi A_0 \xi' \bar{z}_0 A_0 z'_0 - \xi \bar{z}'_0)^{-\frac{N}{2}} \xi. \end{aligned}$$

十分容易将定理 4.3.1 推广成

定理 4.3.2 若 $\varphi(\xi)$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\text{Lip } p (0 < p \leq 1)$, 则当 $\eta_0 = e^{i\theta_0}(t, 1, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0 \in \mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 时, Cauchy 主值

$$\begin{aligned} \text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\mathcal{L}_{IV}(\gamma)} H_{IV}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \dot{\xi} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ \alpha^2(\text{Re } Q)^2 + \beta^2(\text{Im } Q)^2 > \varepsilon^2}} H_{IV}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \dot{\xi} \end{aligned}$$

是存在的, 其中 $z_0 = e^{i\theta_0}(t, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0$, $\gamma = \alpha/\beta$,

$$Q = (1 + \eta_0 A_0 \eta'_0 \bar{\xi} A_0 \xi' - \eta_0 \bar{\xi}') (1 - \bar{z}_0 \xi'), \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

特别地, 当 $\eta_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\mathcal{L}_{IV}(\gamma)} (1 - \bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \dot{\xi} \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ \alpha^2(\text{Re}(1 - \xi_2))^2 + \beta^2(\text{Im } \xi_2)^2 > \varepsilon^2}} (1 - \bar{\xi}_2)^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \dot{\xi} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \xi_2)^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi^2 \\ + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{N}{2}-1} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta,$$

这里 $\xi^* = (e^{2i\theta}, 1, 0, \dots, 0)$.

定理 4.3.3 若 $\varphi(\xi)$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\text{Lip } p (0 < p \leq 1)$, 则当 $\eta_0 = e^{i\theta_0}(t, 1, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0 \in \mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 时, Cauchy 主值

$$\text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{\mathcal{L}_{IV}(0)} H_{IV}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi' \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_{IV})} \int_{D_b(\eta_0, \varepsilon)} H_{IV}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi^2$$

是存在的, 其中 $D_b(\eta_0, \varepsilon)$ 为 \mathcal{L}_{IV} 去掉

$$\{\xi \mid \xi \in \mathcal{L}_{IV}, \operatorname{Re} Q < \alpha\varepsilon, \operatorname{Im} Q < \beta\varepsilon\},$$

Q 由定理 4.3.2 中所定义, $z_0 = e^{i\theta_0}(t, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0$,

$$b = \frac{2^{\frac{N}{2}-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_0^{\arctan \frac{\beta}{\alpha}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt \right\}, \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

特别地, 当 $\eta_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ 时, 有

$$\text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}(0)} (1 - \xi_2)^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \xi^2 \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{D_b(\eta_0, \varepsilon)} (1 - \xi_2)^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \xi^2 \\ = V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \xi_2)^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi^2 \\ + \frac{b}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta,$$

这里 $\xi^* = (e^{2i\theta}, 1, 0, \dots, 0)$, $D_b(\eta_0, \varepsilon)$ 为 \mathcal{L}_{IV} 去掉

$$\{\xi \mid \xi \in \mathcal{L}_{IV}, \operatorname{Re}(1 - \xi_2) < \alpha\varepsilon, |\operatorname{Im} \xi_2| < \beta\varepsilon\}.$$

上述两条定理的证明与定理 4.3.1 相仿, 只要充分利用引理 4.2.1 及引理 4.2.2 即可.

§ 4.4 Cauchy 型积分在 $\mathcal{B}_{IV}-\mathcal{L}_{IV}$ 上的极限值

定理 4.4.1 设 $\varphi(\xi)$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上满足 $\text{Lip } p (0 < p \leq 1)$, 并令

$$F(z) = V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(z, \xi) \varphi(\xi) \xi, \quad z \in \mathcal{B}_{IV},$$

则当 z 从 \mathcal{B}_{IV} 的内部趋于点 $\eta_0 = e^{i\theta_0}(t, 1, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0 \in \mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 时, 只要

$$|1 + \eta_0 A_0 \eta'_0 \overline{\xi} A_0 \overline{\xi'} - \eta_0 \overline{\xi'}| \cdot |1 + z A_0 z' \overline{\xi} A_0 \overline{\xi'} - z \overline{\xi'}|^{-1} \leq M \text{ (常数)}, \quad (4.4.1)$$

则必有

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \eta_0} F(z) = & \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \left(e^{i\theta} \left(e^{i\theta} \frac{1 + t e^{-i\theta}}{1 + t e^{i\theta}}, \right. \right. \\ & \left. \left. 1, 0, \dots, 0 \right) P_0^{-1} \Gamma P_0 \right) \frac{d\theta}{(1 + t e^{i\theta})^{N/2}}, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

其中主值是按定理 4.3.1 中所定义的.

上述定理可以推广成

定理 4.4.2 条件如定理 4.4.1, 则 (4.4.2) 式可以换成

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \eta_0} F(z) = & \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}(\gamma)} H_{IV}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{N}{2}-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \\ & \times \int_0^{2\pi} \varphi \left(e^{i\theta} \left(e^{i\theta} \frac{1 + t e^{-i\theta}}{1 + t e^{i\theta}}, 1, 0, \dots, 0 \right) P_0^{-1} \Gamma P_0 \right) \\ & \times \frac{d\theta}{(1 + t e^{i\theta})^{N/2}}, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

其中主值是按定理 4.3.2 中所定义的.

定理 4.4.3 条件如定理 4.4.1, 则 (4.4.2) 式可以换成

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \eta_0} F(z) = \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{\text{IV}})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}(b)} H_{\text{IV}}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi \\ + b \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(e^{i\theta} \left(e^{i\theta} \frac{1+te^{-i\theta}}{1+te^{i\theta}}, 1, \right.\right. \\ \left.\left. 0, \dots, 0\right) P_0^{-1} \Gamma P_0\right) \frac{d\theta}{(1+te^{i\theta})^{N/2}}, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

其中主值是按定理 4.3.3 中所定义的.

在定理 4.4.2 中, 特别取 $\beta=0$; 在定理 4.4.3 中, 特别取 $\beta=\infty$, 都得到

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \eta_0} F(z) = \text{v. p. } \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}(\infty)} H_{\text{IV}}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\text{Re}(1+\eta_0 A_0 \eta_0' \overline{\xi A_0 \xi'} - \eta_0 \bar{z}') (1-\bar{z}_0 \xi') > \varepsilon} H_{\text{IV}}(\eta_0, \xi) \varphi(\xi) \xi, \end{aligned}$$

也就是 Cauchy 型积分的极限可以用一种 Cauchy 主值来表示.

现在来证明定理 4.4.1.

证 (i) 先取 $\eta_0 = (0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{B}_{\text{IV}} \cap \mathcal{L}_{\text{IV}}$, 并令

$$\xi^* = (e^{2i\theta}, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{L}_{\text{IV}},$$

则

$$\begin{aligned} F(z) = V(\mathcal{L}_{\text{IV}})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}} H_{\text{IV}}(z, \xi) (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi \\ + V(\mathcal{L}_{\text{IV}})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}} H_{\text{IV}}(z, \xi) \varphi(\xi^*) \xi = F_1(z) + F_2(z). \end{aligned}$$

我们首先证明:

$$\lim_{z \rightarrow \eta_0} F_1(z) = \frac{1}{V(\mathcal{L}_{\text{IV}})} \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)}{(1 - \eta_0 \bar{\xi}')^{\frac{N}{2}}} \xi, \quad (4.4.5)$$

此处 z 所沿之途径, 满足已设条件 (4.4.1). 考察

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) H_{\text{IV}}(z, \xi) \xi - \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}} \frac{(\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi}{(1 - \eta_0 \bar{\xi}')^{\frac{N}{2}}} \\ = \left(\int_{\sigma_0} + \int_{\Sigma_0} \right) (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \cdot [(1 - \eta_0 \bar{\xi}')^{\frac{N}{2}} \\ - (1 + z A_0 z' \bar{\xi} \overline{A_0 \xi'} - z \bar{\xi}')^{\frac{N}{2}}] \cdot H_{\text{IV}}(z, \xi) (1 - \eta_0 \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} \xi \\ = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \sigma_\delta: \begin{cases} \xi \in \mathcal{L}_{IV}, \\ |1 - \eta_0 \bar{\xi}'| \leq \delta, \end{cases} \quad \Sigma_\delta: \begin{cases} \xi \in \mathcal{L}_{IV}, \\ |1 - \eta_0 \bar{\xi}'| \geq \delta. \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{\sigma_\delta} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) (\sqrt{1 - \eta_0 \bar{\xi}'} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1 + z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z \bar{\xi}'}) \sum_{l=0}^{N-1} \sqrt{1 - \eta_0 \bar{\xi}'}^{N-1-l} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sqrt{1 + z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z \bar{\xi}'} H_{IV}(z, \xi) (1 - \eta_0 \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} \bar{\xi} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{\sigma_\delta} |\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)| \cdot |\sqrt{1 - \eta_0 \bar{\xi}'} \\ &\quad - \sqrt{1 + z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z \bar{\xi}'}| \\ &\quad \cdot |1 - z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z \bar{\xi}'|^{\frac{-k}{2}} |1 - \eta_0 \bar{\xi}'|^{\frac{k-1-N}{2}} \bar{\xi} \end{aligned}$$

因为 $\varphi(\xi)$ 满足 Lip p , 并且 z 所沿之途径满足

$$|1 - \eta_0 \bar{\xi}'| \cdot |1 + z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z \bar{\xi}'|^{-1} \leq M,$$

所以, 由 § 4.2,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq K \int_{\sigma_\delta} |\sqrt{1 - \eta_0 \bar{\xi}'} - \sqrt{1 + z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z \bar{\xi}'}| \\ &\quad \cdot |1 + z A_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z \bar{\xi}'|^{\frac{-1}{2}} \cdot |1 - \eta_0 \bar{\xi}'|^{\frac{p-N}{2}} \bar{\xi} \\ &\leq K_1 \int_{\sigma_\delta} |1 - \eta_0 \bar{\xi}'|^{\frac{p-N}{2}} \bar{\xi} \\ &\leq K_2 \int_{\substack{yy'=1 \\ |1-y_1-iy_2|<\delta}} |1 - y_1 - iy_2|^{\frac{p-N}{2}} \dot{y} = O(\delta^{\frac{p}{2}}), \end{aligned}$$

这里 K, K_1, K_2 皆为常数.

任与 $\varepsilon > 0$, 可取一 $\delta > 0$, 使在 σ_δ 上的积分 I_1 满足 $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$. 在 δ 取定之后, 由于

$$\int_{\Sigma_\delta} H_{IV}(z, \xi) (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \bar{\xi}$$

作为 z 的函数, 在 $z = \eta_0$ 处连续, 所以当 z 充分接近 η_0 时, 必有

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ 因此, (4.4.5) 成立.}$$

再来证明 $F_2(z)$ 与 z 无关, 而且有

$$F_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta.$$

设 $z = e^{i\theta_0}(t, \rho, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0 \in \mathcal{R}_{IV}$. 先令

$$z = e^{i\theta_0} \tilde{z} P_0^{-1} \Gamma P_0,$$

相应地, $\xi = e^{i\theta_0} \tilde{\xi} P_0^{-1} \Gamma P_0$, $\tilde{\xi}^* = e^{-i\theta_0} \xi^* P_0^{-1} \Gamma' P_0$. 记

$$\varphi(\xi^*) = \tilde{\varphi}(\tilde{\xi}^*),$$

于是有 $F_2(z) = V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(\tilde{z}, \tilde{\xi}) \tilde{\varphi}(\tilde{\xi}^*) \tilde{\xi}.$

再作变换 $w = \Phi(\tilde{z})$, 使 $\tilde{z}_0 = (t, 0, \dots, 0)$ 变为原点, $\tilde{z} = (t, \rho, 0, \dots, 0)$ 变为 $w = (0, \rho, 0, \dots, 0)$, 相应地, $\zeta = \Phi(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi}^*$ 变为 ζ^* , $\zeta^* = \zeta^*(e^{2i\theta_0}, t)$ 是 $e^{2i\theta_0}$ 及 t 的有理函数. 记 $\tilde{\varphi}(\tilde{\xi}^*) = \psi(\zeta^*)$, 并注意到逆变换 $\tilde{z} = \Phi^{-1}(w)$ 将 $w_0 = (-t, 0, \dots, 0)$ 变为原点, 使得

$$\begin{aligned} H_{IV}(\tilde{z}, \tilde{\xi}) \tilde{\xi} &= H_{IV}(w, w_0)^{-1} H_{IV}(w, \zeta) H_{IV}(\zeta, w_0) \zeta \\ &= (1 - w \bar{w}_0')^{-\frac{N}{2}} (1 - \zeta \bar{w}_0')^{-\frac{N}{2}} \zeta = (1 - \rho \bar{\zeta}_2)^{-\frac{N}{2}} (1 + t \zeta_1)^{-\frac{N}{2}} \zeta, \end{aligned}$$

这里用到 $w A_0 w' = 0$, $w_0 A_0 w'_0 = 0$, $w \bar{w}_0' = 0$. 于是

$$F_2(z) = V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \rho \bar{\zeta}_2)^{-\frac{N}{2}} (1 + t \zeta_1)^{-\frac{N}{2}} \psi(\zeta^*) \zeta.$$

记 $\zeta = e^{i\theta} x P_0$, $0 \leq \theta < \pi$, $xx' = 1$, 令 $y_1 + iy_2 = e^{-i\theta}(x_1 + ix_2)$, $y_3 = x_3, \dots, y_N = x_N$, 则

$$\begin{aligned} F_2(z) &= 2^{\frac{N}{2}} V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \rho(y_1 + iy_2))^{-\frac{N}{2}} \\ &\quad \times (1 + te^{2i\theta}(y_1 + iy_2))^{-\frac{N}{2}} \psi(\zeta^*) d\theta \cdot \hat{y}. \end{aligned}$$

再令

$$y_1 + iy_2 = r e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad r = \sqrt{1 - y_3^2 - \dots - y_N^2},$$

则有

$$\hat{y} = d\varphi dy_3 \cdots dy_N,$$

以致

$$\begin{aligned}
F_2(z) &= 2^{\frac{N}{2}} V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_0^\pi d\theta \int_{v_1^2 + \dots + v_N^2 < 1} dy_3 \cdots dy_N \\
&\quad \times \int_0^{2\pi} (1 - \rho r e^{i\varphi})^{-\frac{N}{2}} (1 + tr e^{i\varphi} \cdot e^{2i\theta})^{-\frac{N}{2}} \psi(\zeta^*) d\varphi \\
&= \frac{2^{\frac{N}{2}}}{V(\mathcal{L}_{IV})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \Gamma(k+1)} t^k \\
&\quad \times \int_0^\pi \psi(\zeta^*) e^{2ik\theta} d\theta \int_{v_1^2 + \dots + v_N^2 < 1} r^k dy_3 \cdots dy_N \\
&\quad \times \int_0^{2\pi} (1 - \rho r e^{i\varphi})^{-\frac{N}{2}} e^{ik\varphi} d\varphi,
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} (1 - \rho r e^{i\varphi})^{-\frac{N}{2}} e^{ik\varphi} d\varphi \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + l\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \Gamma(l+1)} \rho^l r^l \int_0^{2\pi} e^{i(k+l)\varphi} d\varphi \\
&= \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } k=0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } k>0 \text{ 时.} \end{cases}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
F_2(z) &= 2^{\frac{N}{2}} V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_0^\pi \psi(\zeta^*) d\theta \cdot 2\pi \int_{v_1^2 + \dots + v_N^2 < 1} dy_3 \cdots dy_N \\
&= \frac{2^{\frac{N}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \cdot 2\pi}{2^{\frac{N}{2}+1} \pi^{\frac{N}{2}+1}} \cdot \frac{\pi^{\frac{N}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int_0^\pi \varphi(\zeta^*) d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta.
\end{aligned}$$

根据定理 4.3.1, 有

$$\begin{aligned}
&V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \eta_0 \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} (\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)) \xi \\
&= \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} (1 - \eta_0 \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi^*) \xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta,
\end{aligned}$$

所以最后得到

$$\lim_{z \rightarrow \eta_0} F(z) = \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{\text{IV}})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}} (1 - \eta_0 \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} \varphi(\xi) \xi \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi^*) d\theta.$$

于是当 $\eta_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ 时, 定理得证.

(ii) 考虑 $\mathcal{B}_{\text{IV}} = \mathcal{L}_{\text{IV}}$ 上任一点

$$\eta_0 = e^{i\theta_0} (t, 1, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0,$$

因可利用 I_0^{IV} 中的变换 $z = e^{i\theta_0} \tilde{z} P_0^{-1} \Gamma P_0$, 故不妨设

$$\eta_0 = (t, 1, 0, \dots, 0).$$

作 I^{IV} 中的变换 $w = \Phi(z)$, 使 $z_0 = (t, 0, \dots, 0)$ 变为原点, 使 η_0 变为 $\zeta_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$. 于是

$$F(z) = V(\mathcal{L}_{\text{IV}})^{-1} H_{\text{IV}}(z, \xi) \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}} H_{\text{IV}}(w, \zeta) \psi(\zeta) \zeta,$$

其中

$$\psi(\zeta) = \varphi(\Phi^{-1}(\zeta)) \cdot (1 + \Phi^{-1}(\zeta) A_0 \Phi^{-1}(\zeta)' \overline{z_0 A_0 z_0'} - \Phi^{-1}(\zeta) \bar{z}_0')^{\frac{N}{2}},$$

它显然在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\text{Lip } p$.

注意到

$$\frac{|1 - \zeta_0 \bar{\zeta}'|}{|1 + w A_0 w' \zeta A_0 \zeta' - w \bar{\zeta}'|} \\ = \frac{|1 + z A_0 z' \overline{z_0 A_0 z_0'} - z \bar{z}_0'| \cdot |1 + \eta_0 A_0 \eta_0' \overline{\xi A_0 \xi'} - \eta_0 \bar{\xi}'|}{(1 + |z_0 A_0 z_0'|^2 - z_0 \bar{z}_0') \cdot |1 + z A_0 z' \overline{\xi A_0 \xi'} - z \bar{\xi}'|},$$

其中 $|1 + z A_0 z' \overline{z_0 A_0 z_0'} - z \bar{z}_0'|$ 显然有界, 而 $1 + |z_0 A_0 z_0'|^2 - z_0 \bar{z}_0'$ 为一正数, 所以根据已设可知, 在 w 趋于 ζ_0 时, 恒有

$$|1 - \zeta_0 \bar{\zeta}'| \cdot |1 + w A_0 w' \zeta A_0 \zeta' - w \bar{\zeta}'|^{-1} \leq M_1 \quad (\text{常数}),$$

因此可利用 (i) 的结果, 得到

$$\lim_{z \rightarrow \eta_0} F(z) = (1 + \eta_0 A_0 \eta_0' \overline{z_0 A_0 z_0'} - \eta_0 \bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}} \\ \cdot \left\{ \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{\text{IV}})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{\text{IV}}} (1 - \zeta_0 \bar{\xi}')^{-\frac{N}{2}} \psi(\zeta) \zeta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(\zeta^*) d\theta \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 0} V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\substack{\mathcal{L}_{IV} \\ |1-\zeta\bar{\zeta}'|>\varepsilon}} \varphi(\Phi^{-1}(\zeta)) \cdot ((1-\Phi^{-1}(\zeta)\bar{z}_0')^{\frac{N}{2}} \\
&\quad \times (1-\eta_0\bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}} \cdot (1-\zeta_0\bar{\zeta}')^{-\frac{N}{2}} \zeta + \frac{1}{2\pi} \\
&\quad \times \int_0^{2\pi} \varphi(\Phi^{-1}(\zeta^*)) \cdot (1-\Phi^{-1}(\zeta^*)\bar{z}')^{\frac{N}{2}} (1-\eta_0\bar{z}_0')^{-\frac{N}{2}} d\theta,
\end{aligned}$$

此处 $\zeta^* = (e^{2i\theta}, 1, 0, \dots, 0)$, 再利用变换 $\xi = \Phi^{-1}(\zeta)$, 并注意到

$$\Phi^{-1}(\zeta^*) = \left(\frac{t + e^{2i\theta}}{1 + te^{2i\theta}}, 1, 0, \dots, 0 \right),$$

$$1 - \Phi^{-1}(\zeta^*)\bar{z}_0' = \frac{1-t^2}{1+te^{2i\theta}} \quad \text{和} \quad 1 - \eta_0\bar{z}_0' = 1-t^2,$$

再以 θ 代 2θ , 便可得出要证的公式.

在定理 4.4.1 的证明中, 以定理 4.3.2 及定理 4.3.3 来替代定理 4.3.1, 就可以证明定理 4.4.2 及定理 4.4.3.

定理 4.4.1, 4.4.2 及 4.4.3 中的条件 (4.4.1) 是有可能放宽的.

§ 4.5 B 调和函数的边界值

设 $f(z) = u(z) + iv(z)$ 在 \mathcal{R}_{IV} 内解析, 在 $\mathcal{R}_{IV} + \mathcal{L}_{IV}$ 上连续, 且 $u(\xi)$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\text{Lip } p (0 < p \leq 1)$, 我们可以利用 § 4.4 中的结果, 导出 $v(z)$ 在 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 上的值与 $u(\xi)$ 间的一些有趣的关系式.

由定理 0.2.2, 我们有 \mathcal{R}_{IV} 上的解析函数的 Schwarz 公式

$$f(z) = V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} u(\xi) s(z, \xi) \xi + iv(0),$$

其中 Schwarz 核 $s(z, \xi) = 2(1 + zA_0z'\bar{\xi}A_0\bar{\xi}' - z\bar{\xi}')^{-1} - 1$. 于是

$$\begin{aligned}
f(z) &= 2V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(z, \xi) u(\xi) \xi \\
&\quad - V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} u(\xi) \xi + iv(0).
\end{aligned}$$

在上式中取 $z = e^{i\theta} (t, \rho, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0 \in \mathcal{B}_{IV}$, 使之趋于 $\mathcal{B}_{IV} - \mathcal{L}_{IV}$ 的点 $\eta = e^{i\theta} (t, 1, 0, \dots, 0) P_0^{-1} \Gamma P_0$ (易知此一路径是满足(4.4.1)的). 根据定理 4.4.1, 便有

$$\begin{aligned} f(\eta) = & \text{v. p. } 2V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(\eta, \xi) u(\xi) \xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(e^{i\theta} \left(e^{i\theta} \frac{1+t\theta^{-i\theta}}{1+t\theta^{i\theta}}, 1, 0, \dots, 0\right) P_0^{-1} \Gamma P_0\right) \\ & \times (1+t\theta^{i\theta})^{-\frac{N}{2}} d\theta - V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} u(\xi) \xi + iv(0). \end{aligned}$$

在上式两端取虚部, 得到

$$\begin{aligned} v(\eta) = & \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} u(\xi) \frac{H_{IV}(\eta, \xi) - H_{IV}(\xi, \eta)}{i} \xi \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(e^{i\theta} \left(e^{i\theta} \frac{1+t\theta^{-i\theta}}{1+t\theta^{i\theta}}, 1, 0, \dots, 0\right) P_0^{-1} \Gamma P_0\right) \\ & \times \frac{T(t, \theta) - T(t, -\theta)}{i} d\theta + v(0), \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

其中 $T(t, \theta) = (1+t\theta^{i\theta})^{-\frac{N}{2}}$.

如果以定理 4.4.2 及定理 4.4.3 代替定理 4.4.1, 则(4.5.1)可替代成

$$\begin{aligned} v(\eta) = & \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}(\gamma)} u(\xi) \frac{H_{IV}(\eta, \xi) - H_{IV}(\xi, \eta)}{i} \xi \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{N}{2}-1} \cdot \frac{1}{2\pi} \\ & \times \int_0^{2\pi} u\left(e^{i\theta} \left(e^{i\theta} \frac{1+t\theta^{-i\theta}}{1+t\theta^{i\theta}}, 1, 0, \dots, 0\right) P_0^{-1} \Gamma P_0\right) \\ & \times \frac{T(t, \theta) - T(t, -\theta)}{i} d\theta + v(0), \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

以及

$$\begin{aligned} v(\eta) = & \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}(b)} u(\xi) \frac{H_{IV}(\eta, \xi) - H_{IV}(\xi, \eta)}{i} \xi \\ & + b \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(e^{i\theta} \left(e^{i\theta} \frac{1+t\theta^{-i\theta}}{1+t\theta^{i\theta}}, 1, 0, \dots, 0\right) P_0^{-1} \Gamma P_0\right) \end{aligned}$$

$$\times \frac{T(t, \theta) - T(t, -\theta)}{i} d\theta + v(0), \quad (4.5.3)$$

这里

$$b = \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_0^{\arctan \frac{\beta}{\alpha}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt \right\}.$$

(4.5.1) 中的 Cauchy 主值由定理 4.3.1 中所定义, (4.5.2) 中的 Cauchy 主值由定理 4.3.2 中所定义, (4.5.3) 中的 Cauchy 主值由定理 4.3.3 中所定义.

在 (4.5.2) 中, 特别取 $\beta = 0$; 在 (4.5.3) 中特别取 $\beta = \infty$, 都可得到

$$\begin{aligned} v(\eta) = & \text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \\ & \times \int_{\mathcal{L}_{IV}(\infty)} u(\xi) \frac{H_{IV}(\eta, \xi) - H_{IV}(\xi, \eta)}{i} \xi + v(0), \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

这里

$$\text{v. p. } V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}(\infty)}$$

定义为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\operatorname{Re}((1+\eta_0 A_0 \eta_0^* \bar{\xi} \bar{A}_0 \bar{\xi}' - \eta_0 \bar{\xi}') (1 - \varepsilon_0 \bar{\xi}')) > \varepsilon}$$

(4.5.4) 告诉我们: 在 $\mathcal{R}_{IV} + \mathcal{L}_{IV}$ 上连续, 在 \mathcal{R}_{IV} 内解析的函数 $f = u + iv$, 若 $u(z)$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\operatorname{Lip} p$, 则 v 可以用 u 的一种 Cauchy 型积分的主值表示之.

§ 4.6 Cauchy 型积分在 \mathcal{L}_{IV} 上的极限值

首先证明两个引理

引理 4.6.1 设 ζ, z 为二复数, 并且

$$(1 - \zeta z) \left(1 - \frac{1}{\zeta} z \right) \neq 0,$$

则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\zeta z)^n \left(1 - \frac{1}{\zeta} z\right)^n} \\ &= (\alpha\beta)^n \sum_{\mu=1}^n C_{n-1}^{2n-\mu-1} \left(\frac{1}{\alpha^\mu (1-\zeta z)^\mu} + \frac{1}{\beta^\mu \left(1 - \frac{1}{\zeta} z\right)^\mu} \right), \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

其中 n 为任一整数, α, β 为

$$\alpha = \frac{1}{1-\zeta^2}, \quad \beta = \frac{\zeta^2}{\zeta^2-1}. \quad (4.6.2)$$

证 利用归纳法, 首先可证

$$\frac{1}{(1-\zeta z)^n \left(1 - \frac{1}{\zeta} z\right)^n} = \sum_{v=1}^n \frac{\alpha^{n-v} \beta}{(1-\zeta z)^v} + \frac{\alpha^n}{1 - \frac{1}{\zeta} z} \quad (4.6.3)$$

和

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\zeta} z\right)^n (1-\zeta z)} = \sum_{v=1}^n \frac{\beta^{n-v} \alpha}{\left(1 - \frac{1}{\zeta} z\right)^v} + \frac{\beta^n}{1-\zeta z}. \quad (4.6.4)$$

事实上, 当 $n=1$ 时,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\zeta} z\right)(1-\zeta z)} = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{\zeta} z} + \frac{\beta}{1-\zeta z} \quad (4.6.5)$$

显然成立. 假定对于某一自然数 n , (4.6.3) 成立, 则因

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\zeta z)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{\zeta} z\right)^n} &= \frac{1}{1-\zeta z} \left(\sum_{v=1}^n \frac{\alpha^{n-v} \beta}{(1-\zeta z)^v} + \frac{\alpha^n}{1 - \frac{1}{\zeta} z} \right) \\ &= \sum_{v=2}^{n+1} \frac{\alpha^{n+1-v} \beta}{(1-\zeta z)^v} + \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \frac{1}{\zeta} z} + \frac{\alpha^n \beta}{1-\zeta z} \\ &= \sum_{v=1}^{n+1} \frac{\alpha^{n+1-v} \beta}{(1-\zeta z)^v} + \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \frac{1}{\zeta} z}, \end{aligned}$$

所以 (4.6.3) 式对于任一自然数 n 皆成立. 同理可证 (4.6.4).

用归纳法证明 (4.6.1) 如下: 当 $n=1$ 时, (4.6.1) 即为 (4.6.5). 假设对于某一自然数 n , (4.6.1) 成立, 便有

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(1-\zeta z)^{n+1} \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{n+1}} \\
 &= (\alpha\beta)^n \sum_{\mu=1}^n O_{n-1}^{2n-\mu-1} \left(\frac{\beta}{\alpha^\mu (1-\zeta z)^{\mu+1}} + \frac{\alpha}{\beta^\mu \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{\mu+1}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\alpha^{\mu-1} (1-\zeta z)^\mu \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)} + \frac{1}{\beta^{\mu-1} \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^\mu (1-\zeta z)} \right) \\
 &= (\alpha\beta)^{n+1} \sum_{\mu=1}^n O_{n-1}^{2n-\mu-1} \left[\frac{1}{\alpha^{\mu+1} (1-\zeta z)^{\mu+1}} + \frac{1}{\beta^{\mu+1} \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^{\mu+1}} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\alpha^\mu \beta} \left(\sum_{v=1}^n \frac{\alpha^{\mu-v} \beta}{(1-\zeta z)^v} + \frac{\alpha^\mu}{1-\frac{1}{\zeta}z} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\alpha \beta^\mu} \left(\sum_{v=1}^n \frac{\beta^{\mu-v} \alpha}{\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^v} + \frac{\beta^\mu}{1-\zeta z} \right) \right] \\
 &= (\alpha\beta)^{n+1} \left(\sum_{\mu=2}^{n+1} \sum_{v=1}^{\mu} O_{n-1}^{2n-\mu} \frac{1}{\alpha^v (1-\zeta z)^v} + \sum_{\mu=1}^n O_{n-1}^{2n-\mu-1} \frac{1}{\alpha (1-\zeta z)} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\mu=2}^{n+1} \sum_{v=1}^{\mu} O_{n-1}^{2n-\mu} \frac{1}{\beta^v \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^v} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\mu=1}^n O_{n-1}^{2n-\mu-1} \frac{1}{\beta \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)} \right) \\
 &= (\alpha\beta)^{n+1} \left[\sum_{v=1}^{n+1} \sum_{\mu=v}^{n+1} O_{n-1}^{2n-\mu} \frac{1}{\alpha^v (1-\zeta z)^v} + (O_n^{2n-1} - O_{n-1}^{2n-1}) \frac{1}{\alpha (1-\zeta z)} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{v=1}^{n+1} \sum_{\mu=v}^{n+1} O_{n-1}^{2n-\mu} \frac{1}{\beta^v \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^v} + (O_n^{2n-1} - O_{n-1}^{2n-1}) \frac{1}{\beta \left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)} \right]
 \end{aligned}$$

$$= (\alpha\beta)^{n+1} \sum_{v=1}^{n+1} O_n^{2n+1-v} \left(\frac{1}{\alpha^v(1-\zeta z)^v} + \frac{1}{\beta^v\left(1-\frac{1}{\zeta}z\right)^v} \right),$$

此处用到 $O_r^r + O_r^{r+1} + \cdots + O_r^{n-1} = O_{r+1}^n$.

于是(4.6.1)对所有的自然数 n 皆成立. 引理得证.

特别地, 若 $|\zeta|=1$, 则

$$\alpha = \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - \bar{\zeta}}, \quad \beta = \frac{\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}},$$

应用公式(4.6.1)可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^n(1-\zeta z)^n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k O_{n-1}^{n+k-1}}{(\zeta - \bar{\zeta})^{n+k}(z - \bar{\zeta})^{n-k}} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{O_{n-1}^{n+k-1}}{(\zeta - \bar{\zeta})^{n+k}(z - \bar{\zeta})^{n-k}}. \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

当 $N=2$ 时, \mathcal{D}_{IV} 即为双圆柱: $|z_1| < 1, |z_2| < 1$. 设 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathcal{L}_{IV}(z)$ 上连续, 作 Cauchy 型积分

$$F(z_1, z_2) = V(\mathcal{L}_{IV}(2))^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}(2)} (1 + zA_0 z' \bar{\xi} A_0 \bar{\xi}' - z\bar{\xi}')^{-1} \varphi(\xi) \xi, \quad (4.6.7)$$

其中

$$\xi = e^{i\theta} (x_1 + ix_2, x_1 - ix_2), \quad x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_2 \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

记 $x_1 + ix_2 = e^{i\varphi}$, 并取 $z_1 = z_2 = \rho$, $(0 < \rho < 1)$, 代入(4.6.7), 便有

$$F(\rho, \rho) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i(\theta+\varphi)}, e^{i(\theta-\varphi)}) d\theta}{(1 - \rho e^{-i(\theta+\varphi)})(1 - \rho e^{-i(\theta-\varphi)})}. \quad (4.6.8)$$

作变换 $\theta + \varphi = \theta_1$, $\theta - \varphi = \theta_2$, (4.6.8)式即为

$$F(\rho, \rho) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{1 - \rho e^{-i\theta_2}} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})}{1 - \rho e^{-i\theta_1}} d\theta_1.$$

根据双圆柱的 Cauchy 型积分的熟知的结果(Какичев[1]), 有

引理 4.6.2 设 $\varphi(\xi)$ 在 $\mathcal{L}_{IV}(2)$ 上满足 Lipschitz 条件, 则

Cauchy 型积分(4.6.8)的极限值

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1-0} F(\rho, \rho) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{1-e^{-i\theta_2}} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})}{1-e^{-i\theta_1}} d\theta_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta_1}, 1)}{1-e^{-i\theta_1}} d\theta_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(1, e^{i\theta_2})}{1-e^{-i\theta_2}} d\theta_2 + \frac{1}{4} \varphi(1, 1). \end{aligned}$$

本节主要结果是下述两条定理.

定理 4.6.1 $N=2n$ ($n \geq 1$) 时, 在 $\mathcal{L}_{IV}(N)$ 上任与一函数 $\varphi(\xi)$, 如果 $\varphi(\xi) = \varphi(e^{i\theta} x P_0) = \varphi_0(e^{i\theta})$ 作为 $e^{i\theta}$ 的函数具有 $n-1$ 阶连续微商, 并且它对 $e^{i\theta}$ 的 k 阶微商 ($0 \leq k \leq n-1$) 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\text{Lip } p$ ($0 < p \leq 1$), 则当 $z = \rho \xi_0$ 从 $\mathcal{R}_{IV}(N)$ 的内部或从 $\mathcal{R}_{IV}^*(N)$ 的内部趋于 \mathcal{L}_{IV} 上的点 ξ_0 时, Cauchy 型积分

$$F(z) = V(\mathcal{L}_{IV})^{-1} \int_{\mathcal{L}_{IV}} H_{IV}(z, \xi) \varphi(\xi) \xi \quad (4.6.9)$$

的极限值 $\lim_{z \rightarrow \xi_0} F(z)$ 是存在的. 特别当 $\xi_0 = (1, 1, 0, \dots, 0)$ 时,

$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} F(\rho, \rho, 0, \dots, 0)$ 和 $\lim_{\rho \rightarrow 1+0} F(\rho, \rho, 0, \dots, 0)$ 的表达式如 (4.6.12) 所示.

注 (1) $\varphi(\xi)$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上属于 $\text{Lip } p$, 指按 § 4.3 中的定义. 记 $\xi = e^{i\theta} x P_0$, $\xi^* = e^{i\tau} y P_0$, 由于

$$\begin{aligned} (\xi - \xi^*) \overline{(\xi - \xi^*)}' &= 2((x-y)(x-y)' + 2\text{Re}(1 - e^{i(\theta-\tau)})xy') \\ &\leq 4((x-y)(x-y)' + |e^{i\theta} - e^{i\tau}|), \end{aligned}$$

以及当 $a, b \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$ 时, 有

$$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha,$$

所以, 若 $\varphi(\xi)$ 属于 $\text{Lip } p$, 则必有

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\xi^*)| = O(((x-y)(x-y'))^{\frac{p}{4}} + |e^{i\theta} - e^{i\tau}|^{\frac{p}{2}}).$$

(2) 所述 $\varphi_0(e^{i\theta})$ 对 $e^{i\theta}$ 可以微商, 指存在

$$\varphi_0'(e^{i\theta_0}) = \frac{d\varphi_0(e^{i\theta})}{de^{i\theta}} \Big|_{\theta=\theta_0} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) - \varphi_0(e^{i\theta_0})}{e^{i\theta} - e^{i\theta_0}},$$

这与 $\varphi_0(e^{i\theta}) = \psi(\theta)$ 作为 θ 的函数的可微性是一致的.

定理证明如下:

无妨考虑 $\xi_0 = (1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{L}_{IV}$, 以 $z = (\rho, \rho, 0, \dots, 0) \in \mathcal{R}_{IV}$ 代入 (4.6.9), 得到

$$\begin{aligned} F_\rho &= F((\rho, \rho, 0, \dots, 0)) \\ &= \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{x x' = 1 \\ x_N > 0}} \dot{x} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta} x P_0) d\theta}{(\rho^2 e^{-2i\theta} - 2\rho x_1 e^{-i\theta} + 1)^{\frac{N}{2}}} \\ &= \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{x x' = 1 \\ x_N > 0}} \dot{x} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta} x P_0) d\theta}{(1 - \rho e^{-i(\theta+\varphi_1)})^{\frac{N}{2}} (1 - \rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})^{\frac{N}{2}}}, \end{aligned}$$

其中

$$e^{i\varphi_1} = x_1 + i\sqrt{1-x_1^2}. \quad (4.6.10)$$

应用公式 (4.6.6), 有

$$\begin{aligned} F_\rho &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k C_{n-1}^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}} \cdot \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{x x' = 1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{n-k}} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} \frac{C_{n-1}^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}} \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{x x' = 1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{n-k}} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1} C_{n-1}^{2(n-1)}}{(2i)^{2(n-1)}} \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{x x' = 1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{2(n-1)}} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta} x P_0) d\theta}{(1 - \rho e^{-i(\theta+\varphi_1)}) (1 - \rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

注意到当 $0 \leq k \leq n-2$ 时,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{n-k}} \\ &= \frac{(-1)^{n-k}}{e^{i(n-k)\varphi_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n-k}}, \end{aligned}$$

此处 $\zeta = e^{i\theta}$, $z = \rho e^{-i\varphi_1}$, $\Phi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) \zeta^{n-k-1}$. 利用分部积分可得

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)^{n-k}} = \frac{1}{(n-k-1)!} \int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi^{(n-k-1)}(\zeta) d\zeta}{\zeta-z},$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi^{(n-k-1)}(\zeta) &= \frac{d^{n-k-1}}{d\zeta^{n-k-1}} (\varphi_0(\zeta) \zeta^{n-k-1}) \\ &= \sum_{l=0}^{n-k-1} C_l^{n-k-1} \frac{(n-k-1)!}{l!} \zeta^l \varphi_0^{(l)}(\zeta). \end{aligned}$$

由于当 $0 \leq k \leq n-2$, $0 \leq l \leq n-k-1$ 时,

$$\begin{aligned} J_\rho &= \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^l \varphi_0^{(l)}(\zeta) d\zeta}{\zeta - \rho e^{-i\varphi_1}} \\ &= \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \frac{1}{2\pi i} \\ &\quad \times \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^l \varphi_0^{(l)}(\zeta) - e^{-il\varphi_1} \varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})}{\zeta - \rho e^{-i\varphi_1}} d\zeta \\ &\quad + e^{-il\varphi_1} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \dot{x}. \end{aligned}$$

根据假设, 上式第一项的内层积分为一通常积分, 并且当 $0 \leq \rho \leq 1$ 时, 它对 x 属于 $\text{Lip } \frac{p}{2}$ ($0 < p \leq 1$), 而第二项积分是一个通常积分. 因而

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1-0} J_\rho &= \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \frac{1}{2\pi i} \\ &\quad \times \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^l \varphi_0^{(l)}(\zeta) - e^{-il\varphi_1} \varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1})}{\zeta - e^{-i\varphi_1}} d\zeta \\ &\quad + e^{-il\varphi_1} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1}) \dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}, \end{aligned}$$

或写为

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1-0} J_\rho &= \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ &\quad \times \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(1+l)\theta} \varphi_0^{(l)}(e^{i\theta}) d\theta}{e^{i\theta} - e^{-i\varphi_1}} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-il\varphi_1} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1}) \dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}}. \end{aligned}$$

上式第一项的内层积分是取习知的 Cauchy 主值, 根据假设可知, 它在 $xx'=1$ 上必属于 $\text{Lip } \frac{p}{2}$ (参见 Мускеллишвили [1] 74~75 页), 因而第一项积分是有意义的. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1-0} I_1 = & (-1)^s \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{C_{n-1}^{n+k-1} C_l^{n-k-1}}{(2i)^{n+k} l!} \frac{1}{e^{i(n-k)\varphi_1}} \\ & \times \left(\frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \right. \\ & \times \text{v. p. } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(l+1)\theta} \varphi_0^{(l)}(e^{i\theta}) d\theta}{e^{i\theta} - e^{-i\varphi_1}} \\ & \left. + \frac{1}{e^{il\varphi_1} \omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1}) \dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \right). \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1-0} I_2 = & \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{(-1)^k C_{n-1}^{n+k-1} C_l^{n-k-1} e^{i(n-k)\varphi_1}}{(2i)^{n+k} l!} \\ & \times \left(\frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \right. \\ & \times \text{v. p. } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(l+1)\theta} \varphi_0^{(l)}(e^{i\theta}) d\theta}{e^{i\theta} - e^{i\varphi_1}} \\ & \left. + \frac{e^{il\varphi_1}}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\varphi_0^{(l)}(e^{i\varphi_1}) \dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \right). \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} I_3^* = & \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(1-x_1^2)^{n-1}} \cdot \frac{1}{2\pi} \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(1-\rho e^{-i(\theta+\varphi_1)})(1-\rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})}, \end{aligned}$$

取球坐标 $x_1 = \cos \varphi_1$, $x_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$, \dots , $x_N = \sin \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{N-1}$, $0 \leq \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1} < \pi$. 于是

$$\begin{aligned} I_3^* = & \frac{2\pi}{\omega_{N-1}} \int_0^\pi \sin^{N-2} \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{N-2} d\varphi_{N-2} \int_0^\pi d\varphi_{N-1} \\ & \times \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi_1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(1-\rho e^{-i(\theta+\varphi_1)})(1-\rho e^{-i(\theta-\varphi_1)})}. \end{aligned}$$

作变换 $\theta + \varphi_1 = \theta_1$, $\theta - \varphi_1 = \theta_2$, 易知, 经变换

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad x_1 = \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}, \quad x_2 = \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \cos \varphi_2, \dots,$$

$$x_N = \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{N-1}$$

后, 函数

$$\begin{aligned} \varphi(e^{i\theta} x P_0) &= \varphi\left(e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \left(\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + i \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \cos \varphi_2\right), \right. \\ &\quad \left. \dots, \sqrt{2} e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{N-1}\right) \\ &= \varphi^*(\theta_1, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

在 $\zeta_1 = e^{i\theta_1}$, $\zeta_2 = e^{i\theta_2}$ ($0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$) 上属于 $\text{Lip } \frac{p}{2}$. 这可如下看

出: 设

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \quad y_1 = \cos \frac{\tau_1 - \tau_2}{2}, \quad y_2 = \sin \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \cos \varphi_2, \dots,$$

$$y_N = \sin \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{N-1},$$

则因 $\varphi(\xi)$ 属于 $\text{Lip } p$, 便有

$$\begin{aligned} &|\varphi^*(\theta_1, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) - \varphi^*(\tau_1, \tau_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1})| \\ &= O(|\theta - \tau|^{\frac{p}{2}} + ((x-y)(x-y)')^{\frac{p}{4}}) \\ &= O((|\theta_1 - \tau_1| + |\theta_2 - \tau_2|)^{\frac{p}{2}}) \\ &= O(|\theta_1 - \tau_1|^{\frac{p}{2}} + |\theta_2 - \tau_2|^{\frac{p}{2}}). \end{aligned}$$

应用引理 4.6.2, 立得

$$\begin{aligned} &\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi_1 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(1 - \rho e^{-i(\theta + \varphi_1)})(1 - \rho e^{-i(\theta - \varphi_1)})} \\ &= \text{v. p.} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{1 - e^{-i\theta_2}} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(\theta_1, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) d\theta_1}{1 - e^{-i\theta_1}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(\theta_1, 0, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) d\theta_1}{1 - e^{-i\theta_1}} + \frac{1}{2} \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(0, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) d\theta}{1 - e^{-i\theta_1}} + \frac{1}{4} \varphi^*(0, 0, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}). \end{aligned}$$

由于 $\varphi^*(0, 0, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) = \varphi((1, 1, 0, \dots, 0))$, 并且

$$\frac{(-1)^{n-1} O_{n-1}^{2(n-1)}}{(2i)^{2(n-1)}} \cdot \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \int_0^\pi \sin^{2n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \\ \times \int_0^\pi \sin \varphi_{2n-2} d\varphi_{2n-2} \int_0^\pi d\varphi_{2n-1} = \frac{\Gamma(2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{2(n-1)} \Gamma(n) \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)} = 1,$$

所以

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} I_2 = \frac{\Gamma(2n-1)}{2^{2(n-1)} \pi^{n-1} \Gamma(n)} \int_0^\pi \sin^{N-3} \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{N-2} d\varphi_{N-2} \\ \times \int_0^\pi \left\{ \text{v. p.} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{1 - e^{-i\theta_2}} \right. \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(\theta_1, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) d\theta_1}{1 - e^{-i\theta_1}} \\ + \frac{1}{2} \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(\theta_1, 0, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1})}{1 - e^{-i\theta_1}} d\theta_1 \\ + \frac{1}{2} \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(0, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1})}{1 - e^{-i\theta_2}} d\theta_2 \Big\} d\varphi_{N-1} \\ + \frac{1}{4} \varphi((1, 1, 0, \dots, 0)).$$

同样可考虑 $\rho \rightarrow 1+0$ 时的极限值. 最后得到

$$\lim_{\rho \rightarrow 1+0} F_\rho = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{O_{n-1}^{n+k-1} O_l^{n-k-1}}{(2i)^{n+k} l!} \cdot \frac{2}{\omega_{N-1}} \\ \times \int_{\substack{x'=1 \\ x_N > 0}} \frac{1}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \left[(-1)^n e^{-i(n-k)\varphi_1} \right. \\ \times \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(l+1)\theta} \varphi_0^{(l)}(e^{i\theta}) d\theta}{e^{i\theta} - e^{-i\varphi_1}} \\ + (-1)^k e^{i(n-k)\varphi_1} \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(l+1)\theta} \varphi_0^{(l)}(e^{i\theta}) d\theta}{e^{i\theta} - e^{i\varphi_1}} \Big] x \\ \pm \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{O_{n-1}^{n+k-1} O_l^{n-k-1}}{(2i)^{n+k} l!} \cdot \frac{1}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{x'=1 \\ x_N > 0}} \frac{1}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ \times [(-1)^n e^{-i(n-k+l)\varphi_1} \varphi_0^{(l)}(e^{-i\varphi_1}) + (-1)^k e^{i(n-k+l)\varphi_1} \varphi_0^{(l)}(e^{i\varphi_1})] x \\ + \frac{(2n-3)!!}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^\pi \sin^{N-3} \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{N-2} d\varphi_{N-2}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\pi \left\{ \text{v. p.} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{1-e^{-i\theta_2}} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(\theta_1, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) d\theta_1}{1-e^{-i\theta_1}} \right. \\
& \pm \frac{1}{2} \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(\theta_1, 0, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) d\theta_1}{1-e^{-i\theta_1}} \\
& \pm \frac{1}{2} \text{v. p.} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^*(0, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) d\theta_2}{1-e^{-i\theta_2}} \left. \right\} d\varphi_{N-1} \\
& + \frac{1}{4} \varphi((1, 1, 0, \dots, 0)). \quad (4.6.12)
\end{aligned}$$

其中

$$\varphi_0^{(l)}(e^{i\theta}) = \left. \frac{d^l \varphi_0(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})^l} \right|_{\theta=a},$$

$e^{i\varphi_1}$ 和 $\varphi^*(\theta_1, \theta_2, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1})$ 分别如 (4.6.10) 和 (4.6.11) 所示.

定理 4.6.2 $N=2n+1 (n \geq 1)$ 时, 在 $\mathcal{L}_{IV}(N)$ 上任与一函数 $\varphi(\xi)$, 如果 $\varphi(\xi) = \varphi(e^{i\theta} x P_0) = \varphi_0(e^{i\theta})$ 对 $e^{i\theta}$ 具有 $n+1$ 阶连续微商, 且

$$\varphi_0^{(k)}(e^{i\theta}) = \frac{d^k \varphi_0(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})^k} \quad (0 \leq k \leq n+1)$$

在 \mathcal{L}_{IV} 上连续, 则当 $z = \rho \xi_0$ 从 $\mathcal{R}_{IV}(N)$ 的内部或从 $\mathcal{R}_{IV}^*(N)$ 的内部趋于 \mathcal{L}_{IV} 上的点 ξ_0 时, Cauchy 型积分 (4.6.9) 的极限值 $\lim_{z \rightarrow \xi_0} F(z)$ 是存在的. 特别当 $\xi_0 = (1, 1, 0, \dots, 0)$ 时,

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} F((\rho, \rho, 0, \dots, 0)) \quad \text{和} \quad \lim_{\rho \rightarrow 1+0} F((\rho, \rho, 0, \dots, 0))$$

的表达式分别如 (4.6.17) 和 (4.6.18) 所示.

证 应用公式 (4.6.6), 有

$$\begin{aligned}
F_\rho = F((\rho, \rho, 0, \dots, 0)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k C_{n-1}^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}} \cdot \frac{2}{\omega_{N-1}} \\
&\times \int_{\substack{x_1^2=1 \\ x_1 > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\
&\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}} (\rho e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} \\
&+ (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}} \cdot \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{x_1^2=1 \\ x_1 > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\
&\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{\frac{1}{2}} (\rho e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}}} = J_1 + J_2 \quad (4.6.13)
\end{aligned}$$

据假设, 可写

$$\varphi_0(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\varphi_0^{(j)}(e^{i\varphi_1})}{j!} (e^{i\theta} - e^{i\varphi_1})^j + \psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1}) \quad (4.6.14)$$

和

$$\varphi_0(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\varphi_0^{(j)}(e^{-i\varphi_1})}{j!} (e^{i\theta} - e^{-i\varphi_1})^j + \psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1}). \quad (4.6.15)$$

根据假设, $\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1})$ 和 $\psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1})$ 在 \mathcal{L}_{IV} 上连续, 并且易知

$$\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1}) = o(|e^{i\theta} - e^{i\varphi_1}|^{n+1}),$$

$$\psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1}) = o(|e^{i\theta} - e^{-i\varphi_1}|^{n+1}).$$

于是

$$\begin{aligned} J_{1,k} &= \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_0(e^{i\theta}) d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}} (\rho e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\varphi_0^{(j)}(e^{-i\varphi_1})}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \dot{x} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\varphi_1})^j d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}} (\rho e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\dot{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1}) d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}} (\rho e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

由于当 $0 \leq \rho < 1$ 时,

$$0 \leq j \leq n+1, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\varphi_1})^j d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}} (\rho e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(-1)^{n-k+1}}{\rho^{i(n-k)\varphi_1}} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{j=0}^l \sum_{\mu=0}^l \frac{(-1)^{j-l} \Gamma(j+1) \Gamma\left(n-k+\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(l-\mu+\frac{1}{2}\right)}{\left[\Gamma(l+1) \Gamma(j-l+1) \Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right) \right] \times \Gamma(\mu+1) \Gamma(l-\mu+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \times \rho^l e^{i(2l-2\mu-j)\varphi_1}.$$

代入 (4.6.16), (4.6.13) 中, 令 $\rho \rightarrow 1-0$, 立得

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} J_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1} \Gamma(n+k)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right) \Gamma(n) \Gamma(k+1) (2i)^{n+k}} \\ \times \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\varphi_0^{(j)}(e^{-i\varphi_1})}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ \times \sum_{l=0}^j \sum_{\mu=0}^l \frac{\left[(-1)^{j-l} \Gamma\left(n-k+\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(l-\mu+\frac{1}{2}\right) \right] \times e^{i(2l+k-2\mu-j-n)\varphi_1}}{\Gamma(l+1) \Gamma(j-l+1) \Gamma(\mu+1) \Gamma(l-\mu+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \Gamma(n+k)}{\Gamma(n) \Gamma(k+1) (2i)^{n+k}} \frac{2}{\omega_{N-1}} \\ \times \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{x}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1}) d\theta}{(e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}} (e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}}.$$

同理可得

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} J_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} \Gamma(n+k)}{\Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right) \Gamma(n) \Gamma(k+1) (2i)^{n+k}} \\ \times \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N > 0}} \frac{\varphi_0^{(j)}(e^{i\varphi_1})}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \sum_{l=0}^j \sum_{\mu=0}^l \\ \times \frac{(-1)^{j-l} \Gamma\left(n-k+\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(l-\mu+\frac{1}{2}\right) e^{-i(2l+k-2\mu-j-n)\varphi_1}}{\Gamma(l+1) \Gamma(j-l+1) \Gamma(\mu+1) \Gamma(l-\mu+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x.$$

$$+(-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)} \frac{2}{(2i)^{n+k}} \frac{1}{\omega_{N-1}} \\ \times \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N \geq 0}} \frac{\bar{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1}) d\theta}{(e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{\frac{1}{2}} (e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}}}.$$

于是

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} F_\rho = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{l=0}^j \sum_{\mu=0}^l \\ \times \frac{(-1)^{j-l} O_k^{n+k-1} O_l^j O_\mu^n \Gamma\left(n-k+\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(l-\mu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (2i)^{n+k} \Gamma\left(n-k+\frac{1}{2}\right) \Gamma(j+1) \Gamma(l+1)} \\ \times \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N \geq 0}} \frac{\left[\begin{aligned} &(-1)^{n+1} \varphi_0^{(j)}(e^{-i\varphi_1}) e^{i(2l+k-2\mu-j-n)\varphi_1} \\ &+ (-1)^{k+1} \varphi_0^{(j)}(e^{i\varphi_1}) e^{-i(2l+k-2\mu-j-n)\varphi_1} \end{aligned} \right] \bar{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \bar{x} \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{O_k^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}} \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N \geq 0}} \frac{\bar{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left\{ \begin{aligned} &(-1)^k (e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{k-n} \psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1}) \\ &+ (-1)^n (e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{k-n} \psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1}) \end{aligned} \right\}}{(e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{\frac{1}{2}} (e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} d\theta. \quad (4.6.17)$$

由于当 $\rho > 1$ 时及 $0 \leq j \leq n+1$, $0 \leq k \leq n-1$ 时,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\varphi_1})^j d\theta}{(\rho e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{n-k+\frac{1}{2}} (\rho e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

所以可用同样的方法得到

$$\lim_{\rho \rightarrow 1+0} F_\rho = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{O_k^{n+k-1}}{(2i)^{n+k}} \frac{2}{\omega_{N-1}} \int_{\substack{xx'=1 \\ x_N \geq 0}} \frac{\bar{x}}{(\sqrt{1-x_1^2})^{n+k}} \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left[\begin{aligned} &(-1)^k (e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{k-n} \psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1}) \\ &+ (-1)^n (e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{k-n} \psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1}) \end{aligned} \right] \bar{x}}{(e^{-i\theta} - e^{i\varphi_1})^{\frac{1}{2}} (e^{-i\theta} - e^{-i\varphi_1})^{\frac{1}{2}}} d\theta. \quad (4.6.18)$$

由(4.6.17)和(4.6.18)所表示的都是通常积分, 其中 $\varphi_0^{(j)}(e^{i\theta}) =$

$\frac{d^j \varphi_0(e^{i\theta})}{d(e^{i\theta})^j} \Big|_{\theta=\alpha}$, $e^{i\varphi_1}$ 和 $\psi(e^{i\theta}, e^{i\varphi_1})$, $\psi(e^{i\theta}, e^{-i\varphi_1})$ 分别如(4.6.10),

(4.6.14), (4.6.15)所示. 定理证毕.

第五章 矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分

§ 5.1 引 言

在上一章中,我们讨论了 Lie 球双曲空间,即第四类典型域的 Cauchy 型积分,在这一章中,将讨论矩阵双曲空间,即第一类典型域的 Cauchy 型积分.

本章的材料取自龚昇[1], 龚昇、孙继广[4], 及龚昇、史济怀[4].

所谓第一类典型域 $\mathcal{R}_I(m, n)$, 是指矩阵双曲空间, 由满足

$$I - Z\bar{Z}' > 0$$

的 m 行 n 列 (不妨设 $m \leq n$) 复元素矩阵 Z 所构成. 用 $\mathcal{L}_I^{(k)}$ 表示 $\overline{\mathcal{R}_I(m, n)}$ 上使 $I - Z\bar{Z}'$ 的秩为 k 的点所成的集合. 特别 $\mathcal{L}_I^{(0)} = \mathcal{L}_I(m, n)$ 为 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 的特征流形.

此外,我们以 $\mathcal{R}_I^*(m, n)$ 表示空间

$$I - Z\bar{Z}' < 0,$$

这里 Z 仍为 m 行 n 列复元素矩阵.

华罗庚[1]指出: 如果 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 的特征流形 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上连续, 则 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 的 Cauchy 型积分.

$$F(Z) = \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} \varphi(U) \det(I - Z\bar{U}')^{-n} dU, \\ Z \in \mathcal{R}_I(m, n) \quad (5.1.1)$$

和 $\mathcal{R}_I^*(n) = \mathcal{R}_I^*(n, n)$ 的 Cauchy 型积分

$$F(Z) = \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I(n)} \varphi(U) \det(I - Z\bar{U}')^{-n} dU, \\ Z \in \mathcal{R}_I^*(n) \quad (5.1.2)$$

是存在的, 这里 $\mathcal{L}_I(n) = \mathcal{L}_I(n, n)$, $V(\mathcal{L}_I(m, n))$ 表示 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 的体积. 同时还指出: 如果 $Z\bar{Z}'$ 的特征根并非都大于 1 或都小于 1, 则常有酉方阵 U , 使 $\det(I - Z\bar{U}') = 0$. 即相应的 Cauchy 核 $\det(I - Z\bar{U}')^{-n}$ 失去意义. 容易看出, 即使 $Z\bar{Z}' > I$, 只要 $m < n$ 而 $n > 2$, 亦必有 $U^{(m, n)} \in \mathcal{L}_I(m, n)$, 使 $\det(I - Z\bar{U}') = 0$. 事实上, Z 可分解为 $Z = U_0^{(m)} (A^{(m)}, 0) V_0^{(n)}$, U_0, V_0 皆为酉方阵, $A = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] > I$. 我们取

$$U = U_0 \begin{pmatrix} I^{(m-2)} & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & 0 & 0^{(m, n-m-1)} \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_m^2}} & -\frac{1}{\lambda_m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_m} & \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_m^2}} \end{pmatrix} V_0,$$

则立得

$$\det(I - Z\bar{U}')$$

$$= \det \left([1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_{m-2}] + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda_m \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_m^2}} & 0 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

因而在 $\mathcal{R}_I^*(m, n)$ ($m < n$) 内, Cauchy 核 $\det(I - Z\bar{U}')^{-n}$ 亦无意义. 所以要研究的只是 $\mathcal{R}_I(m, n)$ ($m \leq n$) 及 $\mathcal{R}_I^*(n)$ 的 Cauchy 型

积分(5.1.1)及(5.1.2).

在这一章中将证明: 如果 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上具有 $N(n)$ (n 为偶数时, $N(n) = \frac{n^2}{4}$; n 为奇数时, $N(n) = \frac{n^2-1}{4}$) 阶满足 Lipschitz 条件的偏微商, 则 $\mathcal{R}_I(n)$ 和 $\mathcal{R}_I^*(n)$ 的 Cauchy 型积分(5.1.1)和(5.1.2)当 $Z = \rho V$ ($0 < \rho < 1$ 或 $\rho > 1$) 趋于 $\mathcal{L}_I(n)$ 上的任一点 V 时的极限值是存在的, 并且给出了当 $V = I^{(n)}$ 时的极限值的表达式(定理 5.2.1). 此外还证明了: 如果 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上满足 Lipschitz 条件, 则 Cauchy 型积分(5.1.1)当 Z 从 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 的内部趋于 $\mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 时的极限值是存在的, 并且给出了极限值的一般表达式(定理 5.4.1). 由此可以推知: $\mathcal{R}_I(m, n)$ 上的任一 \mathcal{B} -调和函数在 $\mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 上的值, 必可用它的 \mathcal{B} -调和共轭函数在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上的值通过积分表出(定理 5.5.1). 当然如前面的几章那样, 这时极限值的表达形式是多种多样的. 当 $m = n$ 时, 利用解析变换 $Z^{-1} = W (Z\bar{Z}' > I)$ 即可得到 $\mathcal{R}_I^*(n)$ 上的 Cauchy 型积分(5.1.2)的相应结果.

§ 5.2 Cauchy 型积分在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上的极限值

关于 Cauchy 型积分

$$F(Z) = \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I(n)} \varphi(U) \det(I - Z\bar{U}')^{-n} \bar{U}' \quad (5.2.1)$$

(其中 $Z \in \mathcal{R}_I(n)$ 或 $\mathcal{R}_I^*(n)$) 在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上的极限值, 有下面的定理 5.2.1.

首先, 我们指出多圆柱上的 Cauchy 型积分的一个结果. 设 $\varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 是定义在 $|\zeta_1| = 1, \dots, |\zeta_n| = 1$ 上的连续函数, 如果对于任意两点 (ξ_1, \dots, ξ_n) 和 (t_1, \dots, t_n) , $|\zeta_j| = 1, |t_j| = 1, j = 1, 2, \dots, n$, 恒有

$$|\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) - \varphi(t_1, \dots, t_n)| \leq M \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j - t_j|^2 \right)^{\alpha/2},$$

其中 M 为一仅与 $\varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 有关的常数, $0 < \alpha \leq 1$, 则称 $\varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 在 $|\zeta_1| = 1, \dots, |\zeta_n| = 1$ 上满足 Lipschitz 条件. 我们有

引理 5.2.1 设 $\varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 是定义在 $|\zeta_1| = 1, \dots, |\zeta_n| = 1$ 上的对称函数, 并且满足 Lipschitz 条件, 则 Cauchy 型积分

$$\begin{aligned} \Phi_\rho = & (2\pi i)^{-n} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} \varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ & \cdot \prod_{k=1}^n (\zeta_k - \rho)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \end{aligned}$$

(其中 $0 < \rho < 1$ 或 $\rho > 1$) 的极限值为

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \Phi_\rho = & \sum_{k=0}^n C_k^n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} \text{v. p. } (2\pi i)^{-k} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_k|=1} \\ & \cdot \varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_k, 1, \dots, 1) \prod_{i=1}^k (\zeta_i - 1)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_k \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

和

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \Phi_\rho = & \sum_{k=0}^n C_k^n \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-k} \text{v. p. } (2\pi i)^{-k} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_k|=1} \\ & \cdot \varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_k, 1, \dots, 1) \prod_{i=1}^k (\zeta_i - 1)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_k, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

其中 v. p. 的意义为 Cauchy 主值, 即

$$\begin{aligned} \text{v. p. } \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_k|=1} \psi(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \prod_{i=1}^k (\zeta_i - 1)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_k \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{|\zeta_1|=1 \\ |\theta_1| > \varepsilon}} \cdots \int_{\substack{|\zeta_k|=1 \\ |\theta_k| > \varepsilon}} \psi(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \prod_{i=1}^k (\zeta_i - 1)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_k. \end{aligned}$$

公式 (5.2.2) 和 (5.2.3) 可由 Карачев [1] 中结果导出.

设 $\varphi(U)$ 是在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上的连续函数, 如果对于 $\mathcal{L}_I(n)$ 上任两点 v, w , 恒有

$$|\varphi(v) - \varphi(w)| \leq M [t_r(v-w) \overline{(v-w)}']^{\frac{\alpha}{2}},$$

其中 M 为一仅与 $\varphi(U)$ 有关的常数, $0 < \alpha \leq 1$, 则称 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上满足 Lipschitz 条件. 如果 $\varphi(U)$ 的所有 N 阶偏微商都在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上满足 Lipschitz 条件, 则记 $\varphi(U) \in \mathcal{L}(N, \alpha)$.

定理 5.2.1 设 $\mathcal{L}_I(n)$ 上任与一函数 $\varphi(U)$: n 为偶数时, 设 $\varphi(U) \in \mathcal{L}\left(\frac{n^2}{4}, \alpha\right)$; n 为奇数时, 设 $\varphi(U) \in \mathcal{L}\left(\frac{n^2-1}{4}, \alpha\right)$, 则当 $Z = \rho V$ 从 $\mathcal{R}_I(n)$ 的内部 ($0 < \rho < 1$) 以及从 $\mathcal{R}^*(n)$ 的内部 ($\rho > 1$) 趋于 $\mathcal{L}_I(n)$ 上任一点 V 时, Cauchy 型积分 (5.2.1) 的极限值是存在的, 并且有

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1-0} F(\rho I) &= \sum_{l=1}^n \sum_{(\mu, l)} s! (n!)^{-1} C_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0} \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^l C_k^l \left(\frac{l}{2}\right)^{l-k} \text{v. p. } (2\pi i)^{-k} \\ &\quad \cdot \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_k|=1} g_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-l}}(\zeta_1, \dots, \zeta_k, 1, \dots, 1) \\ &\quad \cdot \prod_{j=1}^k (\zeta_j - 1)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_k \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

和

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 1+0} F(\rho I) &= \sum_{l=1}^n \sum_{(\mu, l)} s! (n!)^{-1} C_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0} \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^l C_k^l \left(\frac{-1}{2}\right)^{l-k} \text{v. p. } (2\pi i)^{-k} \\ &\quad \cdot \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_k|=1} g_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-l}}(\zeta_1, \dots, \zeta_k, 1, \dots, 1) \\ &\quad \cdot \prod_{j=1}^k (\zeta_j - 1)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_k, \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

其中

$$(\mu, l) \text{ 表示 } \begin{cases} \mu_{n-1} \leq \cdots \leq \mu_{n-l} \leq n-1 \leq \mu_{n-l-1} \leq \cdots \leq \mu_0, \\ \mu_{n-1} + \cdots + \mu_0 = n(n-1), \end{cases}$$

及

$$C_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{l_{n-1} + \dots + l_0 = \mu_{n-1}, \dots, l_0 + k_0 = \mu_0} \delta_{l_{n-1}, \dots, l_1, l_0}^{n-1, \dots, 1, 0} \delta_{k_{n-1}, \dots, k_1, k_0}^{n-1, \dots, 1, 0} \quad (5.2.6)$$

而 $(l_{n-1}, \dots, l_1, l_0)$ 与 $(k_{n-1}, \dots, k_1, k_0)$ 跑遍 $(n-1, \dots, 1, 0)$ 的所有排列, s 是 μ_{n-1}, \dots, μ_0 中不同值的个数, 而

$$g_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-l}} = [(n - \mu_{n-1} - 1)! \cdots (n - \mu_{n-l} - 1)!]^{-1} \cdot \frac{\partial^{(n-1)l - \mu_{n-1} - \dots - \mu_{n-l}} g^{[\mu]}(\zeta_1, \dots, \zeta_l)}{\partial \zeta_1^{n - \mu_{n-1} - \dots} \partial \zeta_l^{n - \mu_{n-l}}}, \quad (5.2.7)$$

$$g^{[\mu]}(\zeta_1, \dots, \zeta_l) = (2\pi i)^{l-n} \int_{|\zeta_{l+1}|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \cdot p_{l+1}^{\mu_{n-l+1}-1-n} \cdots p_n^{\mu_n-n} d\zeta_{l+1} \cdots d\zeta_n, \quad (5.2.8)$$

此处 $p_j = \zeta_j - 1$, $\mu_{n-j} \geq n$, $j = l+1, \dots, n$,

$$f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \omega_n'^{-1} \int_{[v]} \varphi(V A \bar{V}') [\dot{V}], \quad (5.2.9)$$

其中 $A = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]$, $\omega_n' = (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}} [1!2! \cdots (n-1)!]^{-1}$, 积分 (5.2.9) 的意义参见华罗庚[1].

证 无妨取 $V = I$.

令 $F_\rho = F(\rho I)$, 于是有 (华罗庚[1])

$$F(\rho) = (2\pi)^{-n} \int_{2\pi > \theta_1 > \dots > \theta_n > 0} \cdots \int f(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \cdot \prod_{\mu < \nu} |e^{i\theta_\mu} - e^{i\theta_\nu}|^2 \prod_{i=1}^n (1 - \rho e^{-i\theta_i})^{-n} d\theta_1 \cdots d\theta_n.$$

易知 $f(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = \omega_n'^{-1} \int_{[v]} \varphi(V A \bar{V}') [\dot{V}]$

$$(A = [e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}])$$

是 $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ 的对称函数 (龚昇[3]), 并且 $f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 在 $|\zeta_1|=1, \dots, |\zeta_n|=1$ 上属于 $\mathcal{L}\left(\frac{n^2}{4}, \alpha\right)$ (当 n 为偶数时), 或 $\mathcal{L}\left(\frac{n^2-1}{4}, \alpha\right)$ (当 n 为奇数时).

令 $p_{k,\rho} = \zeta_k - \rho$, $\zeta_k = e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, 便得到

$$F_\rho = (n!)^{-1} (2\pi i)^{-n} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) p_{1,\rho}^{-n} \cdots p_{n,\rho}^{-n} \cdot \prod_{\mu \neq \nu} (p_{\mu,\rho} - p_{\nu,\rho}) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu_{n+1}+\dots+\mu_0=n(n-1)} (n!)^{-1} (2\pi i)^{-n} C_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} \\
&\quad \cdot p_{1,\rho}^{-n} \cdots p_{n,\rho}^{-n} p_{1,\rho}^{\mu_{n-1}} \cdots p_{n,\rho}^{\mu_0} \cdot f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\
&= \sum_{(\mu)} (n!)^{-1} s! C_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0} (2\pi i)^{-n} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} \\
&\quad \cdot f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) p_{1,\rho}^{-n+\mu_{n-1}} \cdots p_{n,\rho}^{-n+\mu_0} d\zeta_1, \dots, d\zeta_n \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{(\mu, i)} (n!)^{-1} s! C_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0} I_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0}^{(i)}(\rho), \quad (5.2.10)
\end{aligned}$$

其中 $C_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0}$ 为 (5.2.6) 所示, s 是 μ_{n-1}, \dots, μ_0 中不同值的个数, (μ) 表示

$$\begin{cases} \mu_{n-1} \leq \dots \leq \mu_0, \\ \mu_{n+1} + \dots + \mu_0 = n(n-1), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{而 } I_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0}^{(i)}(\rho) &= (2\pi i)^{-n} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} \\
&\quad \cdot p_{1,\rho}^{\mu_{n-1}-n} \cdots p_{n,\rho}^{\mu_0-n} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\
&= (2\pi i)^{-i} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_i|=1} \\
&\quad \cdot g_{\rho}^{(i)}(\zeta_1, \dots, \zeta_i) p_{1,\rho}^{\mu_{n-1}-i-n} \cdots p_{i,\rho}^{\mu_i-i-n} d\zeta_1 \cdots d\zeta_i,
\end{aligned}$$

此处

$$\begin{aligned}
g_{\rho}^{(i)}(\zeta_1, \dots, \zeta_i) &= (2\pi i)^{i-n} \int_{|\zeta_{i+1}|=1} \cdots \int_{|\zeta_n|=1} \\
&\quad \cdot f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) p_{i+1,\rho}^{\mu_{n-1}-i-n} \cdots p_{n,\rho}^{\mu_0-n} d\zeta_{i+1} \cdots d\zeta_n.
\end{aligned}$$

连续分部积分可得

$$\begin{aligned}
I_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0}^{(i)}(\rho) &= (2\pi i)^{-i} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_i|=1} \\
&\quad \cdot g_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-i}, \rho}(\zeta_1, \dots, \zeta_i) (p_{1,\rho} \cdots p_{i,\rho})^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_i,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
g_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-i}, \rho}(\zeta_1, \dots, \zeta_i) &= [(n - \mu_{n-1} - 1)! \cdots (n - \mu_{n-i} - 1)!]^{-1} \\
&\quad \cdot \frac{\partial^{(n-1)i - \mu_{n-1} - \dots - \mu_{n-i}} g_{\rho}^{(i)}(\zeta_1, \dots, \zeta_i)}{\partial \zeta_1^{n - \mu_{n-1} - 1} \cdots \partial \zeta_i^{n - \mu_{n-i} - 1}}.
\end{aligned}$$

由引理 5.2.1 易知

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} I_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0}^{(n)}(\rho)$$

$$= \sum_{k=1}^i O_k^i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-k} \cdot \text{v. p. } (2\pi i)^{-k} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_k|=1} \\ \cdot g_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-i}}(\zeta_1, \dots, \zeta_k, 1, \dots, 1) \\ \cdot \prod_{v=1}^k (\zeta_v - 1)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_k,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1+0} I_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_0}^{(n)}(\rho)$$

$$= \sum_{k=0}^i O_k^i \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-k} \cdot \text{v. p. } (2\pi i)^{-k} \int_{|\zeta_1|=1} \cdots \int_{|\zeta_k|=1} \\ \cdot g_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-i}}(\zeta_1, \dots, \zeta_k, 1, \dots, 1) \\ \cdot \prod_{v=1}^k (\zeta_v - 1)^{-1} d\zeta_1 \cdots d\zeta_k,$$

其中 $g_{\mu_{n-1}, \dots, \mu_{n-i}}$ 如 (5.2.7) 所示. 所以在 (5.2.10) 式中令 $\rho \rightarrow 1-0$ 和 $1+0$, 便得公式 (5.2.4) 及 (5.2.5).

必须指出, 在公式 (5.2.4) 和 (5.2.5) 中所出现的对 $f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 的偏微商不超过 $\frac{n^2}{4}$ 阶 (当 n 为偶数时) 或 $\frac{n^2-1}{4}$ 阶 (当 n 为奇数时). 即在定理对 $\varphi(U)$ 所设的条件下, 公式 (5.2.4) 和 (5.2.5) 成立.

事实上, 只需注意到

$$\prod_{i \neq k} (p_{i,\rho} - p_{k,\rho}) \prod_{i=1}^n p_{i,\rho}^{-n} = \prod_{i \neq k} (1 - p_{k,\rho} p_{i,\rho}^{-1}) \prod_{i=1}^n p_{i,\rho}^{-1} \\ = \prod_{i=1}^n p_{i,\rho}^{-1} \prod_{i < k} (2 - p_{k,\rho} p_{i,\rho}^{-1} - p_{i,\rho} p_{k,\rho}^{-1}),$$

其最高次项有, 例如

$$\prod_{i=1}^n p_{i,\rho}^{-1} p_{1,\rho}^{1-n} p_{2,\rho} \cdots p_{n,\rho} \cdot p_{2,\rho}^{2-n} p_{3,\rho} \cdots p_{n,\rho} \cdots p_{n-1,\rho}^{-1} p_{n,\rho} \\ = \prod_{i=1}^n p_{i,\rho}^{-1} \{ (p_{2,\rho} p_{3,\rho}^2 \cdots p_{j-1,\rho}^{j-2} p_{j,\rho}^{j-1} \cdots p_{n-1,\rho}^{n-2} p_{n,\rho}^{n-1}) \\ \cdot (p_{1,\rho}^{n-1} p_{2,\rho}^{n-2} \cdots p_{j-1,\rho}^{n-j+1} p_{j,\rho}^{n-j} \cdots p_{n-1,\rho})^{-1} \}.$$

若 $n=2m$ 或 $2m+1$, 易知当且仅当 $j \geq m+1$ 时, 上式 $\{ \}$ 中的 $p_{j,p}$ 的指数为正. 由此可知, 相应于此项, 必须要求 $f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ 所具有的偏微商的阶数为

$$(n-1) + (n-3) + \dots + [(n-m) - (m-1)] = (n-m)m$$

$$= \begin{cases} \frac{n^2}{4}, & \text{当 } n=2m \text{ 时,} \\ \frac{n^2-1}{4}, & \text{当 } n=2m+1 \text{ 时.} \end{cases}$$

定理证毕.

§ 5.3 一条引理

在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上任与一函数 $\varphi(U)$, 如果对于 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上的任意两点 U_0, V_0 , 恒有不等式

$$|\varphi(U_0) - \varphi(V_0)| \leq K (t_r(U_0 - V_0) \overline{(U_0 - V_0)'})^{\alpha/2},$$

其中 K 为一仅与 $\varphi(U)$ 有关的常数, $0 < \alpha \leq 1$, 则称 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha$.

我们首先证明

引理 5.3.1 若 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), 则

$$g(u) = (V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1)))^{-1} \int_{u\bar{w}'=I^{(m-1)}} \varphi \left(\begin{pmatrix} u \\ (0, w) \bar{P}' \end{pmatrix} \right) \dot{w}$$

在 $u\bar{u}'=1$ 上亦属于 $\text{Lip } \alpha$, 其中 P 为 n 阶酉方阵, 使得 $uP = (1, 0, \dots, 0)$.

证 令
$$g_1(u) = \int_{u\bar{w}'=I} \varphi \left(\begin{pmatrix} u \\ (0, w) \bar{P}' \end{pmatrix} \right) \dot{w},$$

$$g_1(v) = \int_{v\bar{w}'=1} \varphi \left(\begin{pmatrix} v \\ (0, w) \bar{P}'_1 \end{pmatrix} \right) \dot{w},$$

其中 $u = (1, 0, \dots, 0)\bar{P}'$, $v = (1, 0, \dots, 0)\bar{P}'_1$. P, P_1 皆为酉方阵. 于是

$$\begin{aligned} |g_1(u) - g_1(v)| &\leq \left| \int_{w\bar{w}'=1} \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \bar{P}' \right) \right. \\ &\quad \left. - \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \bar{P}'_1 \right) \right| \dot{w} \\ &\leq \int_{w\bar{w}'=1} \left| \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \bar{P}' \right) \right. \\ &\quad \left. - \varphi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \bar{P}'_1 \right) \right| \dot{w}. \end{aligned}$$

因为 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_1(m, n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha$, 所以

$$\begin{aligned} |g_1(u) - g_1(v)| &\leq K \int_{w\bar{w}'=1} \left[t_r \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} (\bar{P}' - \bar{P}'_1) (P - P_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{w}' \end{pmatrix} \right) \right]^{\frac{\alpha}{2}} \dot{w} \\ &= K \int_{w\bar{w}'=1} \left[t_r (\bar{P}' - \bar{P}'_1) (P - P_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{w}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \right]^{\frac{\alpha}{2}} \dot{w} \\ &= K_1 [t_r (2I - \bar{P}'P_1 - \bar{P}'_1P)]^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= K_1 [t_r (2I - B - \bar{B}')]^{\frac{\alpha}{2}} = K_1 [t_r (I - B) \overline{(I - B)'}]^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

此处 $K_1 = K \cdot V(\mathcal{L}_1(m-1, n-1))$, $B = P_1 \bar{P}'$.

显然 $u = vP_1 \bar{P}' = vB$. 值得注意的是, 这里的酉方阵 B , 在满足 $u = vB$ 的前提下, 是任意的. 事实上, 可先取一酉方阵 P , 使 $u = (1, 0, \dots, 0)\bar{P}'$, 再任取一酉方阵 B , 只要满足 $u = vB$, 令 $P_1 = BP$, 则必有 $v = uB^{-1} = uP\bar{P}'_1 = (1, 0, \dots, 0)\bar{P}'_1$.

习知对于 u, v , 存在酉方阵 A , 使

$$vA = (1, 0, \dots, 0) = v_0,$$

$$uA = (a, b, 0, \dots, 0) = u_0, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

令 $C = \bar{A}'BA$, 便有

$$u_0 = uA = vBA = v_0 \bar{A}' BA = v_0 C.$$

显然此处的酉方阵 O , 在满足 $u_0 = v_0 O$ 的前提下, 也是任意的. 我们取

$$O = \begin{pmatrix} a, & b \\ -\bar{b}, & \bar{a} \\ & & I^{(n-2)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad t_r((I-O) \overline{(I-O)})' &= 2(|1-a|^2 + |b|^2) \\ &= 4(1 - \operatorname{Re} a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad (u-v) \overline{(u-v)}' &= (u_0 - v_0) \overline{(u_0 - v_0)}' \\ &= |1-a|^2 + |b|^2 = 2(1 - \operatorname{Re} a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad t_r((I-B) \overline{(I-B)})' &= t_r((I-O) \overline{(I-O)})' \\ &= 2(u-v) \overline{(u-v)}'. \end{aligned}$$

因之, 最后得到

$$\begin{aligned} |g(u) - g(v)| &= (V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1)))^{-1} |g_1(u) - g_1(v)| \\ &= O([(u-v) \overline{(u-v)}']^{\frac{\alpha}{2}}). \end{aligned}$$

引理得证.

§ 5.4 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 的 Cauchy 型积分在 $\mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 上的极限值

应用引理 5.3.1, 我们有

定理 5.4.1 若 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上属于 $\operatorname{Lip} \alpha (0 < \alpha \leq 1)$, 则 Cauchy 型积分

$$F(Z) = (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} \varphi(U) \det(I - Z\bar{U}')^{-\alpha} \bar{U} \quad (5.4.1)$$

当 $Z = U_0' \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0 \in \mathcal{R}_I(m, n)$ 趋于点 $Q = U_1' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0 \in \mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 时, 其极限值是存在的, 并且等于

$$\begin{aligned}
& \text{v. p.} (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} \varphi(U) \det(I - Q\bar{U}')^{-n} \dot{U} \\
& + \frac{1}{2} \det(I - Z, \bar{Z}_1')^{-1} (V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1)))^{-1} \\
& \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} \varphi \left(U_0' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \det(I - U_1 \bar{Z}_1') \\
& \cdot \det(I - Z_1 \bar{U}_1')^{1-n} \dot{U}_1
\end{aligned} \quad (5.4.2)$$

其中 v. p. 之意义为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \int_{\mathcal{L}_I(m, n, \varepsilon)} \varphi(U) \det(I - Q\bar{U}')^{-n} \dot{U}, \quad (5.4.3)$$

这里 $\mathcal{L}_I(m, n, \varepsilon)$ 表示点集 $\{U | U \in \mathcal{L}_I(m, n), |\det(I - Q\bar{U}')| \geq \varepsilon |\det(I - T_0 \bar{U}')|\}$ 而 $T_0 = U_0' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$.

证 (i) 先设 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O^{(m-1, n-1)} \end{pmatrix}$, 取 $Z = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & O^{(m-1, n-1)} \end{pmatrix}$,

$0 < \rho < 1$, 令

$$g(u) = \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi \left(\begin{pmatrix} u & \\ 0 & u \end{pmatrix} \bar{P}' \right) \dot{u},$$

其中 P 为引理 5.3.1 所述. 则

$$F(Z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} g(u) (1 - \rho \bar{u}_1')^{-n} \dot{u},$$

此处 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, ω_{2n-1} 表示 $u\bar{u}'=1$ 的体积. 根据引理 5.3.1, $g(u)$ 在 $u\bar{u}'=1$ 上属于 $\text{Lip } \alpha$, 由定理 1.4.2, 便有

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow 1} F(Z) &= \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} g(u) (1 - \rho \bar{u}_1')^{-n} \dot{u} \\
&= \text{v. p.} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{g(u)}{(1 - \bar{u}_1')^n} \dot{u} \\
&\quad + \frac{1}{2} g(1, 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\substack{|u|'=1 \\ |1-u_1| > \varepsilon}} \frac{g(u)}{(1-u_1)^n} \dot{u} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))} \\
&\quad \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}\right) \dot{U}_1 \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \\
&\quad \cdot \int_{\substack{\mathcal{L}_I(m, n) \\ |\det(I-QU')| > \varepsilon}} \frac{\varphi(U)}{\det(I-QU')^n} \dot{U} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \\
&\quad \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}\right) \dot{U}_1 \\
&= \text{v. p.} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} \frac{\varphi(U)}{\det(I-QU')^n} \dot{U} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))} \\
&\quad \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}\right) \dot{U}_1.
\end{aligned}$$

(ii) 在 $\mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 上任取一点 $Q = U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0, Z, \bar{Z}_1 < I^{(m-1)}$. 令 $Z = U'_0 \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$ 趋于 Q . 先作 \mathcal{R}_I 的运动群 I^r 中的变换 $W = \Phi(Z); W = A(Z - T_0)(I - \bar{T}'_0 Z)^{-1} D^{-1}$, 将 $T_0 = U'_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$ 变到原点, 其中 $A^{(m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \bar{U}'_0, D^{(m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} V_0, A_1, D_1$ 分别满足 $\bar{A}'_1 A = (I - Z_1 \bar{Z}'_1)^{-1}, \bar{D}'_1 D_1 = (I - \bar{Z}'_1 Z_1)^{-1}$. 相应地, $W = \Phi(Z)$ 将已与之点 Z 变为 $W = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 将 Q 变为 $Q_0 =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其逆变换成为 $Z = \Phi^{-1}(W)$, 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上即为 $U = \Phi^{-1}(V)$, 利用熟知的关系式

$$\begin{aligned} \det(I - W\bar{V}')^{-1} \det(I - Z\bar{U}') \\ = \det(I - T_0\bar{T}'_0)^{-1} \det(I - T_0\bar{U}') \det(I - Z\bar{T}'_0) \end{aligned}$$

及 $\dot{V} = \det(I - T_0\bar{T}')^* |\det(I - T_0\bar{U}')|^{-2n} \dot{U}$,

可得 $\det(I - W\bar{V}')^{-n} \dot{V} = \det(I - Z\bar{U}')^{-n} \cdot (\det(I - Z\bar{T}'_0) \det(I - U\bar{T}'_0)^{-1})^* \dot{U}$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } \lim_{Z \rightarrow Q} F(Z) &= \lim_{W \rightarrow Q_0} \frac{1}{\det(I - \Phi^{-1}(W)\bar{T}'_0)^* \dot{V}(\mathcal{L}_I(m, n))} \\ &\quad \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} \frac{g(V)}{\det(I - W\bar{V}')^*} \dot{V}, \end{aligned}$$

其中 $g(V) = f(\Phi^{-1}(V)) (\det(I - \Phi^{-1}(V)\bar{T}'_0))^*$, 显然 $g(V)$ 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha$. 由 (1) 便知

$$\begin{aligned} \lim_{Z \rightarrow Q} F(Z) &= \det(I - \Phi^{-1}(Q_0)\bar{T}'_0)^{-1} \\ &\quad \cdot \left[\text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \right. \\ &\quad \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} \frac{g(V)}{\det(I - Q_0\bar{V}')^*} \dot{V} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))} \\ &\quad \left. \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix} \dot{V}_1 \right] = J_1 + J_2 \end{aligned}$$

其中 $J_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))}$

$$\begin{aligned} &\cdot \int_{\substack{\mathcal{L}_I(m, n) \\ |\det(I - Q_0\bar{V}')| > \varepsilon}} \frac{\varphi(\Phi^{-1}(V)) \det(I - \Phi^{-1}(V)\bar{T}'_0)^*}{\det(I - Q_0\bar{V}')^* \det(I - \Phi^{-1}(Q_0)\bar{T}'_0)^*} \dot{V} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\mathcal{L}_I(m, n, \varepsilon)} \varphi(U) \det(I - Q\bar{U}')^{-n} \dot{U} \end{aligned}$$

取之定义为

$$\text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} \frac{\varphi(U)}{\det(I - Q\bar{U}')^n} \dot{U},$$

关于积分区域之确定, 用到如下事实: 将所取之 Z, W 及 T_0 代入

$$\begin{aligned} \det(I - W\bar{V}') &= \det(I - Z\bar{U}') \det(I - T_0\bar{T}'_0) \\ &\quad \cdot \det(I - T_0\bar{U}')^{-1} \det(I - Z\bar{T}'_0)^{-1}, \end{aligned}$$

注意到 $\det(I - T_0\bar{T}'_0) = \det(I - Z\bar{T}'_0)$, 并令 Z 趋于 Q , 相应地, W 趋于 Q_0 , 因而对 V 的积分区域 $|\det(I - Q_0\bar{V}')| \geq \varepsilon$, 经变换 $V = \Phi(U)$, 则变为对 U 的积分区域 $|\det(I - Q\bar{U}')| \geq \varepsilon |\det(I - T_0\bar{U}')|$.

再看 J_2 , 由于在变换 $W = \Phi(Z)$ 下, $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上的点 $U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0$ 变为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix}$, 且有

$$V_1 = A_1(U_1 - Z_1)(I - \bar{Z}'_1 U_1)^{-1} D_1^{-1},$$

$$\text{因而 } \dot{V}_1 = \det(I - Z_1 \bar{Z}'_1)^{n-1} |\det(I - Z_1 \bar{U}'_1)|^{-2(n-1)} \dot{U}_1,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } J_2 &= \frac{1}{2V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))} \\ &\quad \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} \varphi \left(\Phi^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &\quad \cdot \frac{\det \left(I - \Phi^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{pmatrix} \bar{T}'_0 \right) \right)^n}{\det(I - \Phi^{-1}(Q_0) \bar{T}'_0)^n} \dot{V}_1 \\ &= \frac{1}{2V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))} \\ &\quad \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} \varphi \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \\ &\quad \cdot \frac{\det(I - U_1 \bar{Z}'_1)^n \det(I - Z_1 \bar{Z}'_1)^{n-1}}{\det(I - Z_1 \bar{Z}'_1)^n |\det(I - Z_1 \bar{U}'_1)|^{2(n-1)}} \dot{U}_1 \\ &= \frac{1}{2 \det(I - Z_1 \bar{Z}'_1) V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))} \end{aligned}$$

$$\cdot \int_{\mathcal{L}_I(n-1, n-1)} \varphi \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \\ \cdot \frac{\det(I - U_1 \bar{Z}'_1)}{\det(I - Z_1 \bar{U}'_1)^{n-1}} \bar{U}_1.$$

综合上面所证, 便得公式 (5.4.2).

应用定理 5.4.1, 我们还可得到

定理 5.4.2 若 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), 则 $\mathcal{R}_I^*(n)$ 的 Cauchy 型积分

$$F(Z) = \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I(n)} \frac{\varphi(U)}{\det(I - Z\bar{U}')^n} \bar{U} \quad (5.4.4)$$

当 $Z = U'_0 \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0 \in \mathcal{R}_I^*(n)$ ($\rho > 1$) 趋于 $\mathcal{L}_I^{*(n-1)}$ 上的点 $Q^* = U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$ 时的极限值是存在的, 并且等于

$$\text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I(n)} \frac{\varphi(U)}{\det(I - Q^* \bar{U}')^n} \bar{U} \\ - \frac{1}{2} \frac{1}{\det(I - Z_1 \bar{Z}'_1) V(\mathcal{L}_I(n-1))} \\ \cdot \int_{\mathcal{L}_I(n-1)} \varphi \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \\ \cdot \frac{\det(I - U_1 \bar{Z}'_1)}{\det(I - Z_1 \bar{U}'_1)^{1-n}} \bar{U}_1, \quad (5.4.5)$$

此处 v. p. 之意义为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I^*(n, \varepsilon)} \frac{\varphi(U)}{\det(I - Q^* \bar{U}')^n} \bar{U}, \quad (5.4.6)$$

其中 $\mathcal{L}_I^*(n, \varepsilon)$ 表示点集 $\{U | U \in \mathcal{L}_I(n), |\det(Q^* - U)| \geq \varepsilon |\det(Q^* - Q'_0 U)|\}$, 而 $Q'_0 = U'_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I^{(n-1)} \end{pmatrix} \bar{U}_0$.

上述定理的证明是容易的, 令 $Z^{-1} = W$, 相应地, $U^{-1} = V$, 记

$\psi(V) = \varphi(V^{-1}) \det V^{-n}$, 则因 $\dot{U} = \dot{V}$, 便得到

$$G(W) = F(W^{-1})$$

$$= (-1)^n \frac{\det W^n}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I(n)} \frac{\psi(V)}{\det(I - W\bar{V}')^n} \dot{V}.$$

由于 $\psi(V)$ 满足定理 5.4.1 中的条件, 当 $Z \rightarrow Q^*$ 时, $W = \bar{V}'_0 \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} U_0 \in \mathcal{R}_I(n)$ 趋于 $\mathcal{L}_I^{(n-1)}$ 的点 $Q = Q^{*-1} = \bar{V}'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \bar{U}_0$, 其中 $0 < \lambda = \frac{1}{\rho} < 1$, $W_1 = Z_1^{-1}$, 于是应用定理 5.4.1 以及变换 $Z^{-1} = W$, $U^{-1} = V$, 即得公式 (5.4.5).

如果我们以定理 1.6.2. 替代定理 1.4.2, 则可以推广定理 5.4.1 及定理 5.4.2 如下:

定理 5.4.3 若 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), 则 Cauchy 型积分 (5.4.1) 当 $Z = U'_0 \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0 \in \mathcal{R}_I(m, n)$ 趋于点 $Q = U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0 \in \mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 时, 其极限值是存在的, 并且等于

$$\begin{aligned} & \text{v. p. } \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\mathcal{L}_I(m, n)(\gamma)} \varphi(U) \det(I - Q\bar{U}')^{-n} \dot{U} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \det(I - Z_1 \bar{Z}_1)^{-1} (V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} \varphi \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \det(I - U_1 \bar{Z}_1) \\ & \cdot \det(I - Z_1 \bar{U}_1)^{1-n} \dot{U}_1 \end{aligned}$$

其中 v. p. 的定义为

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\substack{\mathcal{L}_I(m, n) \\ \alpha^2 (\text{Re } \det S_1)^2 + \beta^2 (\text{Im } \det S_1)^2 \geq s^2}} \frac{\varphi(U)}{\det(I - Q\bar{U}')^n} \dot{U},$$

这里 $S_1 = I - Q\bar{U}' - U\bar{T}'_0 + Q\bar{T}'_0$, $T_0 = U'_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$, $\gamma = \alpha/\beta$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

特别取 $\beta=0$ 时, 就有

$$\lim_{Z \rightarrow Q} F(Z) \\ = \text{v. p.} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\mathcal{L}_I(m, n)(\infty)} \frac{\varphi(U)}{\det(I - Q\bar{U}')^n} \dot{U},$$

这里 v. p. 的定义为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\substack{\mathcal{L}_I(m, n) \\ \operatorname{Re} \det S_1 > \varepsilon}} \frac{\varphi(U)}{\det(I - Q\bar{U}')^n} \dot{U}.$$

也就是 Cauchy 型积分的极限值可以用一种 Cauchy 主值来表示之.

显然定理 5.4.3 是定理 5.4.1 的推广, 以下的定理 5.4.4 是定理 5.4.2 的推广.

定理 5.4.4 若 $\varphi(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上属于 $\operatorname{Lip} \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), 则 $\mathcal{R}_I^*(n)$ 的 Cauchy 型积分 (5.4.4), 当 $Z = U'_0 \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0 \in \mathcal{R}_I^*(n)$ ($\rho > 1$) 趋于 $\mathcal{L}_I^{*(n-1)}$ 上的点 $Q^* = U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$ 时的极限值是存在的, 且等于

$$\begin{aligned} & \text{v. p.} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I(n)(\gamma)} \frac{\varphi(U)}{\det(I - Q^*\bar{U}')^n} \dot{U} \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \frac{1}{\det(I - Z_1 \bar{Z}'_1) V(\mathcal{L}_I(n-1))} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(n-1)} \varphi \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \frac{\det(I - U_1 \bar{Z}'_1)}{\det(I - Z_1 \bar{U}'_1)^{n-1}} \dot{U}_1, \end{aligned}$$

其中 v. p. 的意义为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\substack{\mathcal{L}_I(n) \\ \alpha^s (\operatorname{Re} \det S_s)^s + \beta^s (\operatorname{Re} \det S_s)^s > \varepsilon^s}} \varphi(U) \det(I - Q^*\bar{U}')^{-s} \dot{U},$$

这里

$$\begin{aligned} S_s &= Q^* \bar{Q}^* + \bar{Q}_0^* - U \bar{Q}^* - Q^* \bar{U}' \bar{Q}_0^*, \\ Q_0^* &= U'_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I^{(n-1)} \end{pmatrix} \bar{U}_0. \end{aligned}$$

特别取 $\beta=0$ 时, 就有

$$\lim_{Z \rightarrow Q^*} F(Z) = \text{v. p.} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I(n)(\infty)} \varphi(U) \det(I - Q^* \bar{U}')^{-n} \dot{U},$$

这里 v. p. 的定义为

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\substack{\mathcal{L}_I(n) \\ \operatorname{Re} \det g_s > s}} \varphi(U) \det(I - Q^* \bar{U}')^{-n} \dot{U}.$$

也就是这时 Cauchy 型积分的极限值也可以用一种 Cauchy 主值来表示之.

同样, 以定理 1.8.2 代替定理 1.4.2, 则定理 5.4.1 中的 (5.4.2) 可以替代为

$$\begin{aligned} & \text{v. p.} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(m, n))} \int_{\mathcal{L}_I(m, n)(b)} \varphi(U) \det(I - Q \bar{U}')^{-n} \dot{U} \\ & + b \det(I - Z_1 \bar{Z}_1')^{-1} V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} \varphi \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \det(I - U_1 \bar{Z}_1') \\ & \cdot \det(I - Z_1 \bar{U}_1')^{1-n} \dot{U}_1, \end{aligned}$$

而 (5.4.3) 可以替代为

$$\lim_{s \rightarrow 0} (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \int_{\substack{\mathcal{L}_I(m, n) \\ \operatorname{Re} \det \delta_1 > as \\ \operatorname{Im} \det \delta_1 > \beta s}} \varphi(U) \det(I - Q \bar{U}')^{-n} \dot{U},$$

这里 S_1 由定理 5.4.3 中所定义, 而

$$b = \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_0^{\arctan \frac{\beta}{a}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt \right\}.$$

而定理 5.4.2 中的 (5.4.5) 可以替代为

$$\begin{aligned} & \text{v. p.} \frac{1}{V(\mathcal{L}_I(n))} \int_{\mathcal{L}_I(n)(b)} \varphi(U) \det(I - Q^* \bar{U}')^{-n} \dot{U} \\ & - b \det(I - Z_1 \bar{Z}_1')^{-1} (V(\mathcal{L}_I(n-1)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(n-1)} \varphi \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \det(I - U_1 \bar{Z}_1') \\ & \cdot \det(I - Z_1 \bar{U}_1')^{1-n} \dot{U}_1. \end{aligned}$$

(5.4.6) 可以替代为

$$\lim_{s \rightarrow 0} (V(\mathcal{L}_I(n)))^{-1} \int_{\substack{\mathcal{L}_I(m, n) \\ \operatorname{Re} \det S_2 > \alpha s \\ \operatorname{Im} \det S_2 > \beta s}} \varphi(U) \det(I - Q^* \bar{U}')^{-n} \dot{U},$$

这里 S_2 由定理 5.4.4 中所定义, 而 b 定义如前.

§ 5.5 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 内的 B -调和函数的边界性质

可以应用定理 5.4.1, 5.4.3 等来研究 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 的 B -调和函数的某些边界性质. 我们有

定理 5.5.1 设 $f(Z) = u(Z) + iv(Z)$ 在 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 内解析, 在 $\mathcal{R}_I(m, n) + \mathcal{L}_I(m, n)$ 上连续, 并且 $u(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上属于 $\operatorname{Lip} \alpha (0 < \alpha \leq 1)$, 则对于 $\mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 上任一点 $Q = U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$, $Z_1 \bar{Z}'_1 < I^{(m-1)}$, 有

$$\begin{aligned} v(Q) = & \text{v. p. } (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} u(U) i^{-1} (H(Q, \bar{U}) - H(U, \bar{Q})) \dot{U} \\ & + \frac{1}{2} (\det(I - Z_1 \bar{Z}'_1) V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} u \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) i^{-1} \\ & \cdot (T(Z_1, \bar{U}_1) - T(U_1, \bar{Z}_1)) \dot{U}_1 + v(0). \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

其中 $H(Q, \bar{U}) = \det(I - Q \bar{U}')^{-n}$,
 $T(Z_1, \bar{U}_1) = \det(I - U_1 \bar{Z}'_1) \det(I - Z_1 \bar{U}_1)^{1-n}$.

证 利用 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 内解析函数的 Schwarz 公式 (参阅 § 0.2), 我们有

$$\begin{aligned} f(Z) = & (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} u(U) S(Z, U) \dot{U} + iv(0), \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

其中 Schwarz 核 $S(Z, U) = 2\det(I - Z\bar{U}')^{-n} - 1$. 令

$$Z = U'_0 \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$$

趋于 Q , $\lim_{Z \rightarrow Q} f(Z) = f(Q)$ 是存在的, 而 (5.5.2) 式之右端的极限值, 可由定理 5.4.1 得出, 于是有

$$\begin{aligned} f(Q) = & \text{v. p. } 2 \cdot (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m, n)} u(U) \det(I - Q\bar{U}')^{-n} \dot{U} + \frac{\det(I - Z_1 \bar{Z}'_1)}{V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1))} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} u \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) \frac{\det(I - U_1 \bar{Z}'_1)}{\det(I - Z_1 \bar{U}'_1)^{n-1}} \dot{U}_1 \\ & = u(0) + iv(0), \end{aligned}$$

对上式两端取虚部, 便得 (5.5.1).

利用变换 $Z^{-1} = W$, 容易得到

定理 5.5.2 设 $f(Z) = u(Z) + iv(Z)$ 在 $\mathcal{R}_I^*(n)$ 内解析, 在 $\mathcal{R}_I^*(n) + \mathcal{L}_I(n)$ 上连续, 并且 $u(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha (0 < \alpha \leq 1)$, 则对于 $\mathcal{L}_I^*(n-1)$ 上任一点 $Q^* = U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$, $Z_1 \bar{Z}'_1 > I^{(n-1)}$ 有

$$\begin{aligned} v(Q^*) = & \text{v. p. } (V(\mathcal{L}_I(n)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(n)} u(U) i^{-1} (H^*(Q^*, \bar{U}') - H^*(U, \bar{Q}^*)) \dot{U} \\ & = (2 \det(I - Z_1 \bar{Z}'_1) V(\mathcal{L}_I(n-1)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(n-1)} u \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) i^{-1} (T^*(Z_1, \bar{U}_1) \\ & = T^*(U_1, Z_1)) \dot{U}_1 + v(Z_\infty), \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

其中

$$H^*(Q^*, \bar{U}) = (-1)^{n^2} \det(Q^* \bar{U})^n \det(I - Q^* \bar{U}')^{-n},$$

$$T^*(Z_1, \bar{U}_1) = (-1)^{n^2} \det(Z_1 \bar{U}_1) \det(I - U_1 \bar{Z}'_1) \det(I - Z_1 \bar{U}')^{1-n}.$$

Z_∞ 表示 Grassmann 流形中, 齐次坐标 $(Z_1, Z_2) = (O^{(n)}, I^{(n)})$ 的无穷远点 (非齐次坐标 Z 与齐次坐标 (Z_1, Z_2) 的关系为 $Z = Z_1^{-1}Z_2$).

定理 5.5.1 及 5.5.2 中的 Cauchy 主值的定义由定理 5.4.1 所给出.

同样, 我们可以推广定理 5.5.1 及 5.5.2 如下:

定理 5.5.3 设 $f(Z) = u(Z) + iv(Z)$ 在 $\mathcal{R}_I(m, n)$ 内解析, 在 $\mathcal{R}_I(m, n) + \mathcal{L}_I(m, n)$ 上连续, 并且 $u(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(m, n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha (0 < \alpha \leq 1)$, 则对于 $\mathcal{L}_I^{(m-1)}$ 上任一点 $Q = U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$, $Z_1 \bar{Z}_1 < I^{(m-1)}$ 有

$$\begin{aligned} v(Q) = & \text{v. p. } (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{R}_I(m, n)(\gamma)} u(U) i^{-1} (H(Q, \bar{U}) - H(U, \bar{Q})) \dot{U} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \cdot (\det(I - Z_1 \bar{Z}_1) V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1)))^{-1} \\ & \cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} u \left(U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) i^{-1} \\ & \cdot (T(Z_1, \bar{U}_1) - T(U_1, \bar{Z}_1)) \dot{U}_1 + v(0), \end{aligned}$$

其中 $H(Q, \bar{U})$ 及 $T(Z_1, \bar{U}_1)$ 由定理 5.5.1 中所给出.

特别取 $\beta = 0$, 就有

$$v(Q) = \text{v. p. } (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \cdot \int_{\mathcal{R}_I(m, n)(\infty)} u(U) i^{-1} (H(Q, \bar{U}) - H(U, \bar{Q})) \dot{U} + v(0),$$

也就是 v 可以用 u 的一种 Cauchy 积分的主值来表达之.

定理 5.5.4 设 $f(Z) = u(Z) + iv(Z)$ 在 $\mathcal{R}_I^*(n)$ 内解析, 在 $\mathcal{R}_I^*(n) + \mathcal{L}_I(n)$ 上连续, 并且 $u(U)$ 在 $\mathcal{L}_I(n)$ 上属于 $\text{Lip } \alpha (0 < \alpha \leq 1)$, 则对 $\mathcal{L}_I^*(n-1)$ 上任一点 $Q^* = U'_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} V_0$, $Z_1 \bar{Z}_1 >$

$I^{(n-1)}$, 有

$$\begin{aligned} v(Q^*) &= \text{v. p. } (V(\mathcal{L}_I(n)))^{-1} \\ &\cdot \int_{\mathcal{L}_I(n)(\gamma)} u(U) i^{-1} (H^*(Q^*, \bar{U}) - H^*(U, \bar{Q}^*)) \dot{U} \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1} \\ &\cdot (\det(I - Z_1 \bar{Z}_1') V(\mathcal{L}_I(n-1)))^{-1} \\ &\cdot \int_{\mathcal{L}_I(n-1)} u \left(U_0' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) i^{-1} (T^*(Z_1, \bar{U}_1) \\ &- T^*(U_1, \bar{Z}_1)) \dot{U}_1 + v(Z_\infty), \end{aligned}$$

其中 $H^*(Q^*, \bar{U})$, $T^*(Z_1, \bar{U}_1)$ 由定理 5.5.2 中所给出.

在定理 5.5.3 及定理 5.5.4 中的 Cauchy 主值分别由定理 5.4.3 及定理 5.4.4 所给出.

同样, (5.5.1) 式可以替代为

$$\begin{aligned} v(Q) &= \text{v. p. } (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \\ &\cdot \int_{\mathcal{L}_I(m, n)(b)} u(U) i^{-1} (H(Q, \bar{U}) - H(U, \bar{Q})) \dot{U} \\ &+ b (\det(I - Z_1 \bar{Z}_1') V(\mathcal{L}_I(m-1, n-1)))^{-1} \\ &\cdot \int_{\mathcal{L}_I(m-1, n-1)} u \left(U_0' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) i^{-1} (T(Z_1, \bar{U}_1) \\ &- T(U_1, \bar{Z}_1)) \dot{U}_1 + v(0). \end{aligned}$$

这里 v. p. 的意义为

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (V(\mathcal{L}_I(m, n)))^{-1} \int_{\substack{\mathcal{L}_I(m, n) \\ \operatorname{Re} \det s_1 > \alpha \epsilon \\ \operatorname{Im} \det s_1 > \beta \epsilon}}, \\ b = \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_0^{\arctan \frac{\beta}{\alpha}} \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt \right\}. \end{aligned}$$

(5.5.3) 式可以替代为

$$v(Q^*) = v. p. (V(\mathcal{L}_I(n)))^{-1}$$

$$\cdot \int_{\mathcal{L}_I(n)(\mathbb{C})} u(U) i^{-1} (H^*(Q^*, \bar{U}) - H^*(U, \bar{Q}^*)) \dot{U}$$

$$= b(\det(I - Z_1 \bar{Z}_1') \cdot V(\mathcal{L}_I(n-1)))^{-1}$$

$$\cdot \int_{\mathcal{L}_I(n-1)} u \left(U_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} V_0 \right) i^{-1} (T^*(Z_1, \bar{U}_1)$$

$$- T^*(U_1, \bar{Z}_1)) \dot{U}_1 + v(Z_\infty).$$

第六章 强拟凸域的 Henkin 型积分

§ 6.1 引言

在 § 0.4 中, 介绍了强拟凸域的 Henkin-Ramirez 核及 Stein-Kerzman 核. 分别记为 H-R 核及 S-K 核. 这两个核都是满足 § 0.2 中的四项要求的. 尤其重要的是: 这是两个解析的核. 若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为有界、光滑、强拟凸域, $H(z, w)$ 为其 H-R 核或 S-K 核, 这里 $z \in \Omega$, $w \in b\Omega$. 由于 $H(z, w)$ 为 z 的解析函数, 所以, 如果 $u(w) \in L(b\Omega)$, 那末 Cauchy 型积分 (或称之为 Henkin 型积分)

$$\int_{w \in b\Omega} H(z, w) u(w) d\sigma_w, \quad z \in \Omega, w \in b\Omega \quad (6.1.1)$$

为 z 的解析函数, 这里 $d\sigma_w$ 为 $b\Omega$ 上的 Lebesgue 体积元素.

这一章的内容为: 将第一、二章中的结果推广到一般的强拟凸域上去, 讨论了当 z 从 Ω 内沿着非切线方向趋于边界时, Henkin 型积分的极限值, 先给出一个一般的 Plemelj 公式, 之后分别对两种特殊的情形进行仔细的讨论, 这里也包含了 Alt^[1] 及 Kerzman 与 Stein^[1] 的结果.

在这一章的最后, 还讨论了由 (0.3.5) 所定义的 Bochner-Martinelli 核 (记作 B-M 核) 所定义的 Bochner-Martinelli 型积

分(记作 B-M 型积分).

这一章的内容取自龚昇[2], 龚昇、史济怀[2, 4].

超球是最重要的强拟凸域, 而强拟凸域在边界上一点附近可以用 Heisenberg 群曲面来逼近之. 事实上, 我们可以有如下的定理(参阅 Alt[1], Folland 与 Stein[1]).

定理 6.1.1 若 Ω 为 \mathbb{C}^n 中光滑、有界、强拟凸域, $0 \in b\Omega$, $H(z, w)$ 为 H-R 核或 S-K 核, 则在 $w=0$ 的附近, 存在一个局部解析变换, 使 $b\Omega$ 成为

$w \in b\Omega$, 当且仅当 $w_n = t + i\tau$ 满足

$$\tau = |\xi|^2 + e(\xi, t), \quad (6.1.2)$$

这里 $w = (w_1, \dots, w_n)$, $\xi = (w_1, \dots, w_{n-1})$, $|\xi|^2 = \xi \bar{\xi}'$, 误差部分 e 是三阶的. 即

$$|e(\xi, t)| = O(\rho^3), \quad (6.1.3)$$

这里 $\rho^4 = |\xi|^4 + t^2$, 而 $H(0, w)$ 成为

$$H(0, w) = \gamma_n \frac{1}{(|\xi|^2 + it)^n} + \phi(w), \quad (6.1.4)$$

这里 $\phi(w)$ 当 $w \in b\Omega$ 时为绝对可积函数, γ_n 为常数.

显然 $(\xi, t) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$, 而 $\tau = |\xi|^2$ 为 Heisenberg 群曲面 S_{n-1} , (6.1.2) 表示 $b\Omega$ 在 $w=0$ 点附近, 可以用 Heisenberg 群曲面 S_{n-1} 来逼近之. 而 (6.1.3) 的 $e(\xi, t)$ 即为 $b\Omega$ 与 S_{n-1} 之间的误差程度. 事实上, 还可以证明

$$\frac{1}{g^n(0, w)} = \frac{1}{(|\xi|^2 + it)^n} (1 + O(\rho)). \quad (6.1.5)$$

§ 6.2 一般的 Plemelj 公式

我们先来证明如下的一般 Plemelj 公式.

定理 6.2.1 设 Ω 为 \mathbb{C}^n 中光滑、有界、强拟凸域, $H(z, w)$ 为

H-R 核或 S-K 核, $u \in C^\infty(b\Omega)$,

$$\mathbb{H}u(z) = \int_{w \in b\Omega} H(z, w) u(w) d\sigma_w, \quad z \in \Omega \quad (6.2.1)$$

为 Cauchy 型积分 (或 Henkin 型积分), 这里 $d\sigma_w$ 为 $b\Omega$ 的 Lebesgue 面积元素, 则 $\mathbb{H}u$ 为 z 的解析函数, 且在 $\bar{\Omega}$ 上连续; 当 $z \in b\Omega$ 时,

$$\begin{aligned} & \text{v. p.} \int_{w \in b\Omega} H(z, w) u(w) d\sigma_w \\ & \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \int_{w \in b\Omega - D(z, \varepsilon)} H(z, w) u(w) d\sigma_w \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

存在, 这里 $D(z, \varepsilon)$ 为 z 的邻域, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $D(z, \varepsilon)$ 缩成一点 z , 且

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in D(z, \varepsilon)} H(z + \nu\delta, w) d\sigma_w = a \quad (6.2.3)$$

存在, a 为常数, ν 为 $b\Omega$ 在 z 的内法线. 记 (6.2.2) 的值为 $\mathbb{H}_0 u$, 当 z_0 从 Ω 内部沿着非切线方向趋于 $z \in b\Omega$ 时, 记

$$\mathbb{H}u(z) = \lim_{z_0 \rightarrow z} \mathbb{H}u(z_0),$$

于是我们有 Plemelj 公式

$$\mathbb{H}u(z) = au(z) + \mathbb{H}_0 u(z). \quad (6.2.4)$$

当 $D(z, \varepsilon)$ 取作 $\{w \in b\Omega, |g(w, z)| < \varepsilon\}$ 时, 即为 Alt^[1] 及 Kerzman-Stein^[11] 定理. 这时 $a = \frac{1}{2}$, 而 Plemelj 公式成为

$$\mathbb{H}u(z) = \frac{1}{2} u(z) + \mathbb{H}_{\frac{1}{2}} u(z). \quad (6.2.5)$$

现在来证定理 6.2.1.

固定 $z \in b\Omega$, 不妨取 $z = 0$. 于是条件 (6.2.3) 成为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in D(0, \varepsilon)} H(0 + \delta\nu, w) d\sigma_w = a, \quad (6.2.6)$$

这里 ν 为内法线方向, 于是

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in b\Omega - D(0, \varepsilon)} H(0 + \delta \nu, w) u(w) d\sigma_w \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in b\Omega - D(0, \varepsilon)} H(0 + \delta \nu, w) (u(w) - u(0)) d\sigma_w \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in b\Omega - D(0, \varepsilon)} H(0 + \delta \nu, w) u(0) d\sigma_w.
\end{aligned}$$

由于 $u \in C^\infty(b\Omega)$, 故上式第一个积分存在, 而第二个积分由 (6.2.6) 知为 $u(0)(1-a)$. 因之, 对于 $0 \in b\Omega$, 可以有

$$\begin{aligned}
& \text{v. p.} \int_{w \in b\Omega} H(0, w) u(w) d\sigma_w \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{w \in b\Omega - D(0, \varepsilon)} H(0, w) u(w) d\sigma_w \\
&= \int_{w \in b\Omega} H(0, w) (u(w) - u(0)) d\sigma_w + u(0)(1-a).
\end{aligned}$$

因之, 对于 $z \in b\Omega$, 都可以有

$$\begin{aligned}
& \text{v. p.} \int_{w \in b\Omega} H(z, w) u(w) d\sigma_w \\
&= \int_{w \in b\Omega} H(z, w) (u(w) - u(z)) d\sigma_w + u(z)(1-a).
\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

若 $z_0 \in \Omega$, 则显然有

$$\begin{aligned}
& \int H(z_0, w) u(w) d\sigma_w \\
&= \int H(z_0, w) (u(w) - u(z_0)) d\sigma_w + u(z_0) \int H(z_0, w) d\sigma_w \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

当 z_0 沿着非切线方向趋于 $b\Omega$ 的边界上一点 z 时, 由 (6.2.7),

$$\begin{aligned}
\lim_{z_0 \rightarrow z} I_1 &= \int H(z, w) (u(w) - u(z)) d\sigma_w \\
&= \text{v. p.} \int_{w \in b\Omega} H(z, w) u(w) d\sigma_w - u(z)(1-a).
\end{aligned}$$

故当 $z \in b\Omega$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}u(z) &= \text{v. p.} \int_{w \in b\Omega} H(z, w) u(w) d\sigma_w - u(z)(1-a) + u(z) \\ &= \text{v. p.} \int_{w \in b\Omega} H(z, w) u(w) d\sigma_w + a u(z), \end{aligned}$$

而此即为 (6.2.4).

来考察一下条件 (6.2.3).

由定理 6.1.1, 有局部解析变换, 在 $0 \in b\Omega$ 附近, $b\Omega$ 可表为 (6.1.2), $H(0, w)$ 可表为 (6.1.4), $D(z, \varepsilon)$ 成为 $D(0, \varepsilon)$. 而 (6.2.6) 成为

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} & \left(\int_{w \in D(0, \varepsilon)} (|\xi|^2 + \delta + it)^{-n} d\mu \right. \\ & \left. + \int_{w \in D(0, \varepsilon)} \phi_\delta(w) d\mu \right), \end{aligned}$$

这里 $\phi_\delta(w)$ 当 $w \in b\Omega$ 时为绝对可积, 且 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_\delta(w) = \phi(w)$. 由于 $D(0, \varepsilon)$ 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时缩成一点. 显然有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in D(0, \varepsilon)} \phi_\delta(w) d\mu = 0.$$

故条件 (6.2.3) 成为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in D(0, \varepsilon)} (|\xi|^2 + \delta + it)^{-n} d\mu = a.$$

作广义 Cayley 变换 T :

$$w_1 = \frac{u_1}{1+u_n}, \dots, w_{n-1} = \frac{u_{n-1}}{1+u_n}, w_n = i \frac{1-u_n}{1+u_n}.$$

由于 $w_n = t + i\tau$, 故

$$t = \frac{2 \operatorname{Im} u_n}{|1+u_n|^2}, \quad \tau = \frac{1-|u_n|^2}{|1+u_n|^2}.$$

于是 T 将 $|\xi|^2 + it + \delta$ 变为

$$\frac{|u_1|^2 + \dots + |u_{n-1}|^2 + 2i \operatorname{Im} u_n}{|1+u_n|^2} + \delta.$$

但 T 将广义上半平面 $\tau > 0$, $\tau = |\xi|^2$ 映为 $\bar{w}w' = 1$, 故上式即为

$$\begin{aligned} \frac{1+2i\operatorname{Im} u_n - |u_n|^2}{|1+u_n|^2} + \delta &= \frac{(1+u_n)(1-\bar{u}_n)}{|1+u_n|^2} + \delta \\ &= \frac{1-\bar{u}_n}{1+u_n} + \delta = \frac{(1+\delta) - (1-\delta)\bar{u}_n}{1+u_n}. \end{aligned}$$

而 $d\mu = \frac{1}{\omega_{2n-1}} (1+\bar{u}_n)^{-n} \dot{u}$, 于是条件 (6.2.6) 成为

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w \in D(p_n, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1+\delta)^n \left(1 - \frac{1-\delta}{1+\delta} \bar{u}_n\right)^n} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w \in D(p_n, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1-\rho \bar{u}_n)^n} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{w \in D(p_n, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1-\rho p_n \bar{u})^n} = a, \quad (6.2.8) \end{aligned}$$

此处 $p_n = (0, \dots, 0, 1)$, $D(p_n, \varepsilon)$ 为 $D(0, \varepsilon)$ 经广义 Cayley 变换后, 所得到的 p_n 的邻域, $\rho = \frac{1-\delta}{1+\delta}$.

再来仔细考察 $D(z, \varepsilon)$. 在定理 6.1.1 中, 进行坐标变换时, 取 $g(w, 0) = -it + \tau = -i w_n$. 所以, 如果 $D(z, \varepsilon)$ 的定义依赖于 $g(w, z)$, 则不妨将 $D(z, \varepsilon)$ 写成 $D(z, \varepsilon; \operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g)$, 经坐标变换后成为 $D(0, \varepsilon; \operatorname{Re} g(w, 0), \operatorname{Im} g(w, 0))$, 或即为 $D(0, \varepsilon; \tau, -t)$, 经广义 Cayley 变换后成为 $D\left(p_n, \varepsilon; \frac{1-|u_n|^2}{|1+u_n|^2}, \frac{-2\operatorname{Im} u_n}{|1+u_n|^2}\right)$. 例如: $D(z, \varepsilon; \operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g)$ 为 $\alpha^2(\operatorname{Re} g)^2 + \beta^2(\operatorname{Im} g)^2 \leq \varepsilon^2$, 这可化为 $\alpha^2(1-|u_n|^2)^2 + 4\beta^2(\operatorname{Im} u_n)^2 \leq \varepsilon^2$, 又例如: $D(z, \varepsilon; \operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g)$ 为 $\{|\operatorname{Re} g| < \alpha\varepsilon, |\operatorname{Im} g| < \beta\varepsilon, \alpha > 0, \beta > 0\}$, 这可化为 $\{1-|u_n|^2 < \alpha\varepsilon, 2|\operatorname{Im} u_n| < \beta\varepsilon, \alpha > 0, \beta > 0\}$ 等等. 在以下几节中, 将具体给出一些邻域 $D(z, \varepsilon)$, 对 (6.2.8) 进行计算, 可以将第一、二章中的结果推广到强拟凸域上去.

§ 6.3 $b\Omega$ 上的奇异积分

显然由 (6.2.4) 的左边所定义的 $Hu(z)$, $z \in b\Omega$, 为奇异

积分.

若 $w \in \partial\Omega$, $\varphi(w) \in \text{Lip } p$, $0 < p \leq 1$, $z, v \in \partial\Omega$, 在 Cauchy 主值意义下, 令

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \int_{\partial\Omega(a)} H(z, w) \varphi(w) d\sigma_w, \\ \varphi_2(v) &= \int_{\partial\Omega(b)} H(v, w) \varphi_1(w) d\sigma_w,\end{aligned}$$

这里 $\int_{\partial\Omega(a)}$ 表示 Cauchy 积分的主值, 挖去的邻域为 $D_a(z, \varepsilon)$, 而对应的 (6.2.3) 的值为 a .

作 Cauchy 型积分

$$\begin{aligned}f(\eta) &= \int_{\partial\Omega} H(\eta, w) \varphi(w) d\sigma_w, \\ f_1(\eta) &= \int_{\partial\Omega} H(\eta, w) \varphi_1(w) d\sigma_w, \quad \eta \in \Omega.\end{aligned}$$

η 从 Ω 内沿着非切线方向趋于 $\partial\Omega$ 上一点 ζ , 则由 (6.2.4),

$$\begin{aligned}f(\zeta) &= \int_{\partial\Omega(a)} H(\zeta, w) \varphi(w) d\sigma_w + a\varphi(\zeta), \\ f_1(\zeta) &= \int_{\partial\Omega(b)} H(\zeta, w) \varphi_1(w) d\sigma_w + b\varphi_1(\zeta).\end{aligned}$$

由 $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$ 的定义知

$$\varphi_1(\zeta) = f(\zeta) - a\varphi(\zeta), \quad \varphi_2(\zeta) = f_1(\zeta) - b\varphi_1(\zeta), \quad \zeta \in \partial\Omega.$$

将 $\varphi_1(\zeta)$ 代入 $f_1(\eta)$ 的表达式中,

$$\begin{aligned}f_1(\eta) &= \int_{\partial\Omega(b)} H(\eta, w) f(w) d\sigma_w \\ &\quad - a \int_{\partial\Omega(b)} H(\eta, w) \varphi(w) d\sigma_w \\ &= f(\eta) - af(\eta) = (1-a)f(\eta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{因而} \quad \varphi_2(\zeta) &= (1-a)f(\zeta) - b(f(\zeta) - a\varphi(\zeta)) \\ &= (1-a-b)f(\zeta) + ab\varphi(\zeta).\end{aligned}$$

对于 a , 如果存在 z 的邻域 $D_b(z, \varepsilon)$, 使得对应的 (6.2.3) 的值为

b , 且 $1-a-b=0$, 那末就得到

$$\varphi_2(\zeta) = ab \varphi(\zeta),$$

也就是

$$\mathbb{H}_b \mathbb{H}_a = ab I,$$

这里 I 表示恒等算子. 同样也可证明

$$\mathbb{H}_a \mathbb{H}_b = ab I.$$

于是可以得到推广的 Poincaré-Bertrand 公式:

定理 6.3.1 若 Ω 为 \mathbb{C}^n 中光滑、有界、强拟凸域, $H(z, w)$ 为 H-R 核或 S-K 核, $\varphi \in C^\infty(\bar{b}\Omega)$, 奇异积分算子 \mathbb{H}_a 由 (6.2.2) 所定义. 如果对于 a , 存在另一种定义 Cauchy 主值的方法, 使 (6.2.3) 的值为 b , 且 $1-a-b=0$, 而其奇异积分算子为 \mathbb{H}_b , 那末

$$\mathbb{H}_a \mathbb{H}_b = \mathbb{H}_b \mathbb{H}_a = ab I, \quad (6.3.1)$$

这里 I 表示恒等算子, $ab \neq 0$.

(6.3.1) 还可以写成: 记 $\frac{1}{a} \mathbb{H}_a \varphi = \psi$, 则 $\frac{1}{b} \mathbb{H}_b \psi = \varphi$. 或记 $\frac{1}{b} \mathbb{H}_b \varphi = \psi$, 则 $\frac{1}{a} \mathbb{H}_a \psi = \varphi$.

由算子理论易知, 如果 λ 不是奇异积分算子 \mathbb{H}_a 的特征根, \mathbb{K} 为一连续算子, $f \in C^\infty(\bar{b}\Omega)$, 则在 $\bar{b}\Omega$ 上的奇异积分方程

$$(-\lambda I + \mathbb{H}_a + \mathbb{K}) \varphi = f \quad (6.3.2)$$

有唯一解, 即可正规化为一个 Fredholm 积分方程. 当 $D(z, \varepsilon)$ 就是 $|g(z, w)| < \varepsilon$, Ω 为超球时, 这就是球面上的奇异积分方程理论 (本书第二章的内容).

若 $w \in \bar{b}\Omega$, $z \in \bar{b}\Omega$, Ω 的 H-R 核或 S-K 核, $H(z, w)$ 为奇异核, 如同球面的情形一样, 由 $H(z, w)$ 可定义 B -核为

$$B(z, w) = H(z, w) + H(w, z) - 1,$$

及 Hilbert 核

$$h(z, w) = \frac{1}{i} (H(z, w) - H(w, z)).$$

同样, 由这些奇异核出发, 除了奇异积分算子 \mathbb{H}_a 以外, 还可得

$$\mathbb{B}_a \varphi = \int_{b\Omega(a)} \varphi(w) B(z, w) d\sigma_w$$

及

$$\mathbb{h}_a \varphi = \int_{b\Omega(a)} \varphi(w) h(z, w) d\sigma_w,$$

这里积分取 Cauchy 主值, 挖去的邻域为 $D_a(z, \varepsilon)$, 使得 (6.2.3) 的值为 a .

显然, 如果 \mathbb{H}_a 有逆算子, 则 \mathbb{B}_a 及 \mathbb{h}_a 也有逆算子, 于是也可以解在 $b\Omega$ 上的奇异积分方程

$$(-\mu I + \mathbb{B}_a + \mathbb{K})\varphi = f \quad (6.3.3)$$

及

$$(-\nu I + \mathbb{h}_a + \mathbb{K})\varphi = f, \quad (6.3.4)$$

这里 μ, ν 分别不是 \mathbb{B}_a 及 \mathbb{h}_a 的特征根, \mathbb{K} 为一连续算子, $f \in O^\infty(b\Omega)$. 显然, 如同第二章中所做的那样, 可以解形如 (6.3.2), (6.3.3), (6.3.4) 的奇异积分方程组. 而当 $D(z, \varepsilon)$ 是 $|g(z, w)| < \varepsilon$, Ω 为超球时, 这就是第二章中所讨论的奇异积分方程理论.

§ 6.4 当邻域是椭圆的情形

在这一节中, 我们将一般的 Plemelj 公式, 定理 6.2.1 具体化, 即取邻域 $D(z, \varepsilon)$ 为“椭圆”:

$$D_\varepsilon(z, \varepsilon) = \{w \in b\Omega, \alpha^2(\operatorname{Re} g)^2 + \beta^2(\operatorname{Im} g)^2 \leq \varepsilon^2\},$$

这里 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \neq 0$. 当 $\alpha = \beta$ 时, 即为“圆”时, 就是 Alt[1] 及 Kerzman-Stein[1] 所讨论的情形. 在这情形下, 要证明 (6.2.3) 成为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in D_\varepsilon(z, \varepsilon)} H(z + \nu\delta, w) d\sigma_w = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1}. \quad (6.4.1)$$

这时 Plemelj 公式 (6.2.4) 中的

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{a+\beta} \right)^{n-1}.$$

于是特别当 $\beta=0$ 时, 这时 $a=0$, Plemelj 公式成为十分简单的情形

$$\mathbb{H}u(z) = \mathbb{H}_0u(z).$$

即当 z_0 从 Ω 内部, 沿着非切线方向趋于 $z \in \partial\Omega$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{z_0 \rightarrow z} \int_{w \in \partial\Omega} H(z, w) u(w) d\sigma_w \\ = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{w \in \partial\Omega - D(z, \varepsilon)} H(z, w) u(w) d\sigma_w, \end{aligned}$$

而 $D(z, \varepsilon)$ 为“带于” $\{w \in \partial\Omega, |\operatorname{Re} g| < \varepsilon\}$. 也就是, 如同超球的情形一样, 对于强拟凸域, 可以找到一种定义 Cauchy 型积分的主值的方法, 使得这个主值就是 Cauchy 型积分 $\mathbb{H}u(z_0)$ 当 z_0 从内部沿非切线方向趋于 $z \in \partial\Omega$ 时的极限值.

再看看什么时候奇异积分算子 \mathbb{H}_a 有逆算子. 在 § 6.3 中已经谈及, 如能找到算子 \mathbb{H}_b , 而 $1-a-b=0$, $ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{b} \mathbb{H}_b$ 就是 $\frac{1}{a} \mathbb{H}_a$ 的逆算子, 显然, 如果

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{a+\beta} \right)^{n-1} < 1,$$

即

$$\frac{\alpha}{\beta} > 2^{\frac{n-2}{n-1}} - 1 \quad (6.4.2)$$

时, 取 $D_\varepsilon(z, \varepsilon) = \{w \in \partial\Omega, \alpha'^2(\operatorname{Re} g)^2 + \beta'^2(\operatorname{Im} g)^2 \leq \varepsilon^2\}$,

这里 $\alpha' \geq 0$, $\beta' \geq 0$, $\alpha' + \beta' \neq 0$, 而

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \left[2^{2-n} - \left(\frac{\alpha+\beta}{\beta} \right)^{1-n} \right]^{\frac{-1}{n-1}} - 1.$$

若记

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\beta'}{\alpha'+\beta'} \right)^{n-1} = b,$$

则 $\frac{1}{b} \mathbb{H}_b$ 为 $\frac{1}{a} \mathbb{H}_a$ 的逆算子. 所以在限制 (6.4.2) 之下, \mathbb{H}_a 是有逆

算子的, 同样可以具体地讨论奇异积分方程理论.

现在来证明(6.4.1). 由§ 6.2 的讨论, 只要证明(6.2.8)成立即可, 即证明

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u \in D(p_n, \varepsilon)} \frac{\bar{u}}{(1 - \rho \bar{p}_n \bar{u}')^n} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u \in D(p_n, \varepsilon)} \frac{\bar{u}}{(1 - \rho \bar{u}_n)^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1}, \end{aligned}$$

这里 $p_n = (0, \dots, 0, 1)$, $0 < \rho < 1$, 而

$$D(p_n, \varepsilon) = \{u | u\bar{u}' = 1, \alpha^2(1 - |u_n|^2)^2 + 4\beta^2(\operatorname{Im} u_n)^2 \leq \varepsilon^2\},$$

记 $\tilde{D}(p_n, \varepsilon) = \{u | u\bar{u}' = 1, \alpha^2(1 - |u_n|^2)^2 + 4\beta^2(\operatorname{Im} u_n)^2 > \varepsilon^2\}$,

$$\begin{aligned} \text{由于 } & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u \in D(p_n, \varepsilon)} \frac{\bar{u}}{(1 - \rho \bar{u}_n)^n} + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u \in \tilde{D}(p_n, \varepsilon)} \frac{\bar{u}}{(1 - \rho \bar{u}_n)^n} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{\bar{u}}{(1 - \rho \bar{u}_n)^n} = 1, \end{aligned}$$

因此只要证明

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u \in \tilde{D}(p_n, \varepsilon)} \frac{\bar{u}}{(1 - \rho \bar{u}_n)^n} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u \in \tilde{D}(p_n, \varepsilon)} \frac{\bar{u}}{(1 - \bar{u}_n)^n} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{n-1}, \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

而 $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$.

当 $\alpha = 0$, $\beta > 0$ 时, (6.4.3) 已在第一章中证明.

再考虑 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 的情形.

如同在第一章中所进行的那样, 命 $\bar{u}_n = r e^{i\theta}$, $v = (u_1, \dots, u_{n-1})$.

于是 $\tilde{D}(p_n, \varepsilon)$ 可以写为

$$\begin{cases} v\bar{v}' = 1 - r^2, \\ \alpha^2(1 - r^2)^2 + 4\beta^2 r^2 \sin^2 \theta > \varepsilon^2. \end{cases}$$

记

$$O = \sin^{-1} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2(1 - r^2)^2}}{2\beta r},$$

则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u \in \tilde{D}(p_{n-s})} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \dot{v} \left\{ \int_{-(\pi-c)}^{-c} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n} + \int_c^{\pi-c} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n} \right\} \\ &+ \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' > \frac{\varepsilon}{\alpha}} \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n} = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

在第一章中已知

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi+c}^{-c} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n} + \int_c^{\pi-c} \frac{d\theta}{(1-re^{i\theta})^n} \\ &= 2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(1+re^{-ic})^k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(1-re^{ic})^k} \right. \\ & \quad \left. + \log \frac{1-re^{ic}}{1+re^{-ic}} \right\} + 2(\pi-2c). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} J_k - \sum_{k=1}^{n-1} H_k + J_0 - H_0 \right\} \\ &+ \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} (\pi-2c) \dot{v}, \end{aligned}$$

这里 $J_0 = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \log \frac{1}{1+re^{-ic}} \dot{v}$, $J_k = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{\dot{v}}{k(1+re^{-ic})^k}$,
 $k=1, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} H_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \log \frac{1}{1-re^{ic}} \dot{v}, \quad H_k = \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \frac{\dot{v}}{k(1-re^{ic})^k}, \\ &k=1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

由于

$$\sin C = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r}, \quad \cos C = \frac{\sqrt{4\beta^2 r^2 - \varepsilon^2 + \alpha^2(1-r^2)^2}}{2\beta r},$$

可以有

$$1+re^{-ic} = 1 + \frac{\sqrt{4\beta^2(1-s^2) + \alpha^2 s^4 - \varepsilon^2}}{2\beta} - i \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \alpha^2 s^4}}{2\beta},$$

而 $s^2 = 1-r^2$, 命 $v = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-2})$, 用球坐标

$$x_1 = s \cos \varphi_1, \quad x_2 = s \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad \dots,$$

$$x_{2n-2} = s \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-3},$$

则 $\dot{v} = s^{2n-3} \sin^{2n-4} \varphi_1 \sin^{2n-5} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{2n-4} ds d\varphi_1 \cdots d\varphi_{2n-3},$

于是
$$J_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{4\beta^2(1-s^2) + \alpha^2 s^4 - s^2}}{2\beta} \right. \\ \left. - i \frac{\sqrt{s^2 - \alpha^2 s^4}}{2\beta} \right\}^{-k} s^{2n-3} ds.$$

命 $\eta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, $s = \sqrt{\eta} t$, 则 J_k 等于

$$\frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \eta^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{[2\beta + \sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2) + \alpha^2 \eta^2 t^4 - \alpha^2 \eta^2} - i \sqrt{\alpha^2 \eta^2(1-t^4)}]^k}.$$

由于被积函数绝对值有界, 故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_k = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1,$$

同样可证 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_0 = 0$.

与处理 J_k 的方法一样, H_k 可写成

$$H_k = \frac{2\pi^{n-1}(2\beta)^k}{k\Gamma(n-1)} \int_0^1 \frac{\eta^{n-1} t^{2n-3} dt}{[2\beta - \sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2) + \alpha^2 \eta^2 t^4 - \alpha^2 \eta^2} - i \sqrt{\alpha^2 \eta^2(1-t^4)}]^k}.$$

被积函数的绝对值, 当 $k < n-1$ 时, 不大于

$$M/(\beta^2 t^4 + \alpha^2(1-t^4) - 1),$$

这里 M 为一绝对常数, 而显然这在 $[0, 1]$ 中为可积函数, 故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_k = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-2.$$

而 H_{n-1} 为

$$\begin{aligned} & \frac{2(2\beta\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \\ & \cdot \int_0^1 \frac{\eta^{n-1} t^{2n-3} dt}{[2\beta - \sqrt{4\beta^2(1-\eta t^2) + \alpha^2 \eta^2(t^4-1)} - i\sqrt{\alpha^2 \eta^2(1-t^4)}]^{n-1}} \\ & = \frac{2(2\beta\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{[\beta t^2 - i\alpha\sqrt{1-t^4} + O(\eta)]^{n-1}}. \end{aligned}$$

若命 $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, 则有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_{n-1} = \frac{2^n \pi^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(t^2 - i\gamma\sqrt{1-t^4})^{n-1}}.$$

设 $t^2 = \cos \theta$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_{n-1} &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-2}\theta \sin \theta d\theta}{(\cos \theta - i\gamma \sin \theta)^{n-1}} \\ &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{1}{(1+\gamma)^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2i\theta} + 1)^{n-2} (e^{2i\theta} - 1)}{i \left(1 + \frac{1-\gamma}{1+\gamma} e^{2i\theta}\right)^{n-1}} d\theta \\ &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{1}{(1+\gamma)^{n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{i} \sum_{p=0}^{n-2} \sum_{\substack{q=0 \\ p+q \neq 0}}^{\infty} (-1)^q \right. \\ & \quad \cdot C_p^{n-2} C_q^{n+q-2} \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^q (e^{2i\theta(p+q+1)} - e^{2i\theta(p+q)}) \\ & \quad \left. + \frac{1}{i} (e^{2i\theta} - 1) d\theta \right) \\ &= -\frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)} \frac{1}{2(1+\gamma)^{n-1}} \sum_{p=0}^{n-2} \sum_{\substack{q=0 \\ p+q \neq 0}}^{\infty} (-1)^q \\ & \quad \cdot C_p^{n-2} C_q^{n+q-2} \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^q \\ & \quad \cdot \left[\frac{(-1)^{p+q+1} - 1}{p+q+1} - \frac{(-1)^{p+q} - 1}{p+q} \right] \\ & \quad + \frac{(2\pi)^{n-1}}{\Gamma(n)(1+\gamma)^{n-1}} \left(1 - \frac{\pi}{2i} \right). \end{aligned}$$

$$\text{因而 } \operatorname{Im}(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_{n-1}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} H_{n-1} = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+\gamma} \right)^{n-1}.$$

最后计算 H_0 :

$$\begin{aligned} H_0 &= \int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} \log \frac{1}{1 - r\theta^{40}} \dot{v} \\ &= -\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}} s^{2n-3} \log(1 - r\theta^{40}) ds, \end{aligned}$$

而 $\operatorname{Im} \log(1 - r\theta^{40}) = \arg(1 - r\theta^{40}) = O(1)$,

所以当 $n > 1$ 时,

$$\operatorname{Im} H_0 = O\left(\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}} s^{2n-3} ds\right) = O(\varepsilon^{n-1}) = O(1).$$

同样可证: 当 $n > 1$ 时,

$$\int_{v\bar{v}' < \frac{\varepsilon}{\alpha}} (\pi - 2C) \dot{v} = O(1).$$

综合上述结果, 就有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+\gamma}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-1}.$$

再看 I_2 , 由于

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1 - r\theta^{40})^k} = 2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(1+r)^k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(1-r)^k} \right\} + 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } I_2 &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{\varepsilon}{\alpha} < v\bar{v}' < 1} \frac{\dot{v}}{k(1+r)^k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{\varepsilon}{\alpha} < v\bar{v}' < 1} \frac{\dot{v}}{k(1-r)^k} \right\} + \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \int_{\frac{\varepsilon}{\alpha} < v\bar{v}' < 1} \dot{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{显然 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \int_{\frac{\varepsilon}{\alpha} < v\bar{v}' < 1} \frac{\dot{v}}{(1+r)^k} \right) \\ = \operatorname{Im} \left(\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{s^{2n-3} ds}{(1+\sqrt{1-s^2})^k} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \int_{\frac{\varepsilon}{\alpha} < v\bar{v}' < 1} \frac{\dot{v}}{(1-r)^k} \right) \\ = \operatorname{Im} \left(\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{s^{2n-3} ds}{(1-\sqrt{1-s^2})^k} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\text{故得 } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \int_{0 < v\bar{v}' < 1} \dot{v} = 1.$$

对 (6.4.4) 式两边取极限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$, 并将上述结果代入, 即得 (6.4.3).

最后考虑 $\alpha > 0, \beta = 0$ 的情形.

这时 (6.4.3) 成为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\tilde{D}(p_n, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} = 1,$$

而
$$\tilde{D}(p_n, \varepsilon) = \left\{ u \mid u\bar{u}' = 1, 1 - |u_n|^2 > \frac{\varepsilon}{\alpha} \right\}.$$

仍用前面的变换, $\tilde{D}(p_n, \varepsilon)$ 即为

$$\begin{cases} v\bar{v}' = 1 - r^2, \\ 1 - r^2 > \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\tilde{D}(p_n, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{1-v\bar{v}' > \frac{\varepsilon}{\alpha}} \dot{v} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^n}.$$

这就是前面讨论过的积分 I_2 . 但已知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = 1.$$

故得 (6.4.3) 当 $\alpha > 0, \beta = 0$ 时也成立.

§ 6.5 当邻域是矩形的情形

现在取 z 的邻域 $D_R(z, \varepsilon)$ 为“矩形”:

$$D_R(z, \varepsilon) = \{w \in b\Omega, |\operatorname{Re} g| < \alpha \varepsilon, |\operatorname{Im} g| < \beta \varepsilon\},$$

这里 $\alpha > 0, \beta > 0$. 在这种情形下, 将要证明 (6.2.3) 成为

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{w \in D_R(z, \varepsilon)} H(z + v\delta, w) d\sigma_w \\ = \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - h_n \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

其中

$$h_n(x) = \int_0^x \cos^{n-2} t \frac{\sin(n-1)t}{\sin t} dt,$$

这时 Plemelj 公式 (6.2.4) 中的

$$a = \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - h_n \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right\}, \quad (6.5.2)$$

特别当 $\alpha = \beta$ 时, 即矩形为正方形时,

$$a = \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - h_n \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\}.$$

当 $\alpha = \infty$ 时, $D_R(z, \varepsilon)$ 成为

$$\{w \in b\Omega, |\operatorname{Im} g| < \beta \varepsilon\},$$

这就是上节讨论的情形, 由于 $h_n(0) = 0$, 所以 $a = 2^{n-2}$, 与上节的结果相一致.

当 $\beta = \infty$ 时, $D_R(z, \varepsilon)$ 成为

$$\{w \in b\Omega, |\operatorname{Re} g| < \alpha \varepsilon\},$$

这也是上节讨论的情形. 在以下的证明中可以看出

$$\begin{aligned} h_n \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right) &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\alpha^k}{k(\alpha^2 + \beta^2)^{k/2}} \sin \left(k \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right), \end{aligned}$$

所以当 $\beta \rightarrow \infty$ 时, $\operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$, 而 $h_n \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$, 故 $a = 0$. 这也与上节的结果相一致.

如同上一节一样, 对于奇异积分算子 \mathbb{H}_a , 如能找到算子 \mathbb{H}_b , 而 $1 - a - b = 0$, 则 $\frac{1}{b} \mathbb{H}_b$ 就是 $\frac{1}{a} \mathbb{H}_a$ 的逆算子. 对于一个固定的 n , 如果 α, β 满足

$$h_n \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right) > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n-1}}, \quad (6.5.3)$$

那末 \mathbb{H}_a (a 由 (6.5.2) 所定义) 是有逆算子的. 也就是, 我们只要选取 $D_R(z, \varepsilon)$ 为

$$\{z \in b\Omega, |\operatorname{Re} g| < \alpha' \varepsilon, |\operatorname{Im} g| < \beta' \varepsilon\},$$

这里 $\alpha' > 0, \beta' > 0$, 使得

$$h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta'}{\alpha'}\right)=\pi\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

记 $b=\frac{2^{n-1}}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\right\}$, 则 $\frac{1}{b}\mathbb{H}_b$ 即为 $\frac{1}{a}\mathbb{H}_a$ 的逆算子. 所以在限制 (6.5.3) 之下, \mathbb{H}_a 是有逆算子的. 同样可以具体讨论奇异积分方程理论.

现在来证 (6.5.1). 由 § 6.2 的讨论, 只要证明 (6.2.8) 成立, 即

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{u \in D_R(p_n, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1-\rho u_n)^n} \\ = \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\}, \end{aligned}$$

而 $p_n=(0, \dots, 0, 1)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, 及

$$D_R(p_n, \varepsilon) = \{u | u\bar{u}'=1, 1-|u_n|^2 < \alpha\varepsilon, 2|\operatorname{Im} u_n| < \beta\varepsilon\},$$

记 $\tilde{D}_R(p_n, \varepsilon) = \{u\bar{u}'=1\} - D_R(p_n, \varepsilon)$,

$$M_\varepsilon = \{u | u\bar{u}'=1, 1-|u_n|^2 > \alpha\varepsilon\},$$

$$N_\varepsilon = \{u | u\bar{u}'=1, 2|\operatorname{Im} u_n| > \beta\varepsilon\},$$

$$Q_\varepsilon = \{u | u\bar{u}'=1, 1-|u_n|^2 > \alpha\varepsilon, 2|\operatorname{Im} u_n| > \beta\varepsilon\}.$$

于是所要证的等价于

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\tilde{D}_R(p_n, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} \\ = 1 - \frac{2^{n-1}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - h_n\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

但是

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\tilde{D}_R(p_n, \varepsilon)} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} \\ = \left(\frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{M_\varepsilon} + \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{N_\varepsilon} - \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{Q_\varepsilon} \right) \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}, \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

由上一节已知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{M_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{N_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} = 1 - 2^{n-2}, \quad (6.5.6)$$

所以只要计算

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{Q_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n}$$

即可.

如同上一节中所进行的那样, 记

$$\bar{u}_n = r e^{i\theta}, \quad v = (u_1, \dots, u_{n-1}),$$

则 Q_ε 可以写为

$$\begin{cases} v\bar{v}' = 1 - r^2, \\ 1 - r^2 > \alpha\varepsilon, \quad 2r|\sin\theta| > \beta\varepsilon. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{Q_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\alpha\varepsilon < v\bar{v}' < 1 - (\frac{\beta\varepsilon}{2})^2} \dot{v} \left\{ \int_{-\pi+\varepsilon}^0 + \int_0^{\pi-\varepsilon} \right\} \frac{d\theta}{(1-r e^{i\theta})^n}. \end{aligned}$$

$$\text{这里 } c = \sin^{-1} \frac{\beta\varepsilon}{2r}.$$

如同上一节那样, 按第一章中的做法, 这还可写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{Q_\varepsilon} \frac{\dot{u}}{(1-\bar{u}_n)^n} \\ &= \frac{2}{\omega_{2n-1}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} J_k - \sum_{k=1}^{n-1} H_k + J_0 - H_0 \right\} \\ & \quad + \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{\alpha\varepsilon < v\bar{v}' < 1 - (\frac{\beta\varepsilon}{2})^2} (\pi - 2c) \dot{v}, \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad J_0 = \int_{\alpha\varepsilon < v\bar{v}' < 1 - (\frac{\beta\varepsilon}{2})^2} \log \frac{1}{1+r e^{-i\theta}} \dot{v},$$

$$H_0 = \int_{\alpha\varepsilon < v\bar{v}' < 1 - (\frac{\beta\varepsilon}{2})^2} \log \frac{1}{1-r e^{i\theta}} \dot{v},$$

$$J_k = \int_{\alpha\varepsilon < v\bar{v}' < 1 - (\frac{\beta\varepsilon}{2})^2} \frac{\dot{v}}{k(1+r e^{-i\theta})^k},$$

$$H_k = \int_{\alpha\varepsilon < v\bar{v}' < 1 - (\frac{\beta\varepsilon}{2})^2} \frac{\dot{v}}{k(1-r e^{i\theta})^k}, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

采用球坐标,

$$\begin{aligned}
\int_{as < v\bar{v}' < 1 - \left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2} c\dot{v} &= \int_{as < v\bar{v}' < 1 - \left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2} \sin^{-1} \frac{\beta\varepsilon}{2\sqrt{1-v\bar{v}'}} \dot{v} \\
&= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \int_{\sqrt{as}}^{\sqrt{1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}} s^{2n-3} \sin^{-1} \frac{\beta\varepsilon}{2\sqrt{1-s^2}} ds \\
&= \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)} \left[\int_0^1 \left(1 - \left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2\right)^{n-1} \right. \\
&\quad \cdot \sin^{-1} \frac{\beta\varepsilon}{2\sqrt{1-\left(1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2\right)t^2}} dt \\
&\quad \left. - \int_0^1 (as)^{n-1} \sin^{-1} \frac{\beta\varepsilon}{2\sqrt{1-as t^2}} dt \right].
\end{aligned}$$

由于被积函数有界, 故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{as < v\bar{v}' < 1 - \left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2} c\dot{v} = 0.$$

从而有

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\omega_{2n-1}} \int_{as < v\bar{v}' < 1 - \left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2} (\pi - 2c) \dot{v} \\
= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\omega_{2n-1}} \int_{as < v\bar{v}' < 1 - \left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2} \dot{v} = 1.
\end{aligned}$$

由于

$$1 + r\varepsilon^{-4i} = 1 + \frac{\sqrt{4r^2 - \beta^2\varepsilon^2}}{2} - i\frac{\beta\varepsilon}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}
J_k &= \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \int_{\sqrt{as}}^{\sqrt{1-\left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2}} \frac{s^{2n-3} ds}{\left(1 + \frac{\sqrt{4(1-s^2) - \beta^2\varepsilon^2}}{2} - i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^k} \\
&= \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \left\{ \int_0^1 \frac{\left[1 - \left(\frac{\beta\varepsilon}{2}\right)^2\right]^{n-1} t^{2n-3} dt}{\left[1 + \frac{\sqrt{4\left(1 - \left(1 - \frac{\beta^2\varepsilon^2}{4}\right)t^2} - \beta^2\varepsilon^2\right)}{2} - i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right]^k} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \frac{(as)^{n-1} t^{2n-3} dt}{\left[1 + \frac{\sqrt{4(1-as t^2) - \beta^2\varepsilon^2}}{2} - i\frac{\beta\varepsilon}{2}\right]^k} \right\}.
\end{aligned}$$

这两个被积函数都是有界的, 故有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_k = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(1 + \sqrt{1-t^2})^k}.$$

所以 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} J_k = 0, \quad k=1, \dots, n-1.$

同法可证 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} J_0 = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} H_0 = 0.$

与计算 J_k 一样, H_k 可写为

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} \left\{ \int_0^1 \frac{\left(1 - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4}\right)^{n-1} t^{2n-3} dt}{\left[1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4}\right)t^2} - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4} - i \frac{\beta \varepsilon}{2}\right]^k} \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 \frac{(\alpha \varepsilon)^{n-1} t^{2n-3} dt}{\left[1 - \sqrt{1 - \alpha \varepsilon t^2} - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4} - i \frac{\beta \varepsilon}{2}\right]^k} \right\} \\ & = \frac{2\pi^{n-1}}{k\Gamma(n-1)} (X_k - Y_k). \end{aligned}$$

第一个积分的被积函数的绝对值不超过 $\frac{t^{2n-3}}{(1 - \sqrt{1-t^2})^k}$, 而当 $k < n-1$ 时, 此函数在 $[0, 1]$ 上积分收敛, 所以

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_k = \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(1 - \sqrt{1-t^2})^k}.$$

第二个积分的被积函数的绝对值为 $O(\varepsilon^{n-k-1})$, 所以当 $k < n-1$ 时, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_k = 0$. 因之, 当 $k < n-1$ 时, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} H_k = 0.$$

最后计算 H_{n-1} . 这时 $H_{n-1} = \frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n)} (X_{n-1} - Y_{n-1})$, 而

$$X_{n-1} = \left(1 - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4}\right)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4}\right)(1-t^2)} - i \frac{\beta \varepsilon}{2}\right]^{n-1}},$$

$$Y_{n-1} = (\alpha \varepsilon)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{\left[1 - \sqrt{1 - \alpha \varepsilon t^2} - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4} - i \frac{\beta \varepsilon}{2}\right]^{n-1}}.$$

记 $1 - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4} = \eta^2$, 则

$$X_{n-1} = \eta^{2n-2} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{[1 - \eta \sqrt{1-t^2} - i \sqrt{1-\eta^2}]^{n-1}}.$$

由第一章已知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} X_{n-1} = 2^{n-3} \pi.$$

由于 $1 - \sqrt{1 - \alpha \varepsilon t^2 - \frac{\beta^2 \varepsilon^2}{4}} - i \frac{\beta \varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \alpha t^2 - \frac{i}{2} \beta + O(\varepsilon)$,

所以, 若记 $\gamma = \beta/\alpha$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_{n-1} &= 2^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{\left(\frac{1}{2} \alpha t^2 - \frac{i}{2} \beta\right)^{n-1}} \\ &= 2^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{(t^2 - i\gamma)^{n-1}} = 2^{n-2} \int_0^1 \frac{x^{n-2} dx}{(x - i\gamma)^{n-1}} \\ &= 2^{n-2} \left(\log \frac{1-i\gamma}{-i\gamma} - D_n + \sum_{k=1}^{n-2} O_k^{n-2} \frac{(-1)^k}{k} \right). \end{aligned}$$

这里 $D_n = \sum_{k=1}^{n-2} O_k^{n-2} \frac{1}{k} \left(\frac{i\gamma}{1-i\gamma} \right)^k$, ($n \geq 3$). 于是有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} Y_{n-1} = 2^{n-1} \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\gamma} - \operatorname{Im} D_n \right], \quad n \geq 3. \quad (6.5.7)$$

当 $n=2$ 时,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} Y_1 = 2 \operatorname{Im} \left(\int_0^1 \frac{t}{t^2 - i\gamma} dt \right) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\gamma}.$$

所以如果规定 $D_2 = 0$, 则 (6.5.7) 当 $n \geq 2$ 时也成立. 于是有, 当 $n \geq 2$ 时,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} H_{n-1} = \frac{2^{n-2} \pi^n}{\Gamma(n)} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} D_n \right\}.$$

因之

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{Q_\varepsilon} \frac{\bar{u}}{(1-u_n)^n} \\ = 1 - 2^{n-2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} D_n \right). \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

由(6.5.5), (6.5.6), (6.5.8)得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\bar{D}_\varepsilon(p_n, \varepsilon)} \frac{i}{(1-u_n)^n} = 1 - \frac{2^{n-1}}{\pi} \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\gamma} - \operatorname{Im} D_n \right).$$

记 $\zeta = \frac{i\gamma}{1-i\gamma}$, 则

$$D_2 = 0, \quad D_n = \sum_{k=1}^{n-2} C_k^{n-2} \frac{\zeta^k}{k} \quad (n \geq 3),$$

而 $D_{k+1} - D_k = \frac{(\zeta+1)^{k-1} - 1}{k-1}$, 所以

$$D_n = \sum_{k=2}^{n-1} (D_{k+1} - D_k) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(\zeta+1)^{k-1} - 1}{k-1} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1}.$$

由于 $\operatorname{Im}(\zeta+1)^k = \frac{1}{(1+\gamma^2)^{k/2}} \sin(k \operatorname{tg}^{-1} \gamma)$

$$= \frac{\alpha^k}{(\alpha^2 + \beta^2)^{k/2}} \sin\left(k \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha}\right),$$

所以

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} D_n &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} \operatorname{Im}(\zeta+1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\alpha^k}{k(\alpha^2 + \beta^2)^{k/2}} \sin\left(k \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

记 $\eta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$, 则有

$$\operatorname{Im} D_n = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} \cos^k \eta \sin k\eta.$$

显然有

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \operatorname{Im} D_n &= \sum_{k=1}^{n-2} \cos^{k-1} \eta \cos(k+1)\eta \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n-2} \cos^{k-1} \eta e^{i(k+1)\eta} = -1 + \cos^{n-2} \eta \frac{\sin(n-1)\eta}{\sin \eta}. \end{aligned}$$

于是得到 $\operatorname{Im} D_n = -\eta + \int_0^\eta \cos^{n-2} \eta \frac{\sin(n-1)\eta}{\sin \eta} d\eta,$

这就证明了(6.5.1).

§ 6.6 关于 Bochner-Martinelli 型积分

设 $m=2n(n \geq 2)$, $z_\alpha = u_\alpha + iu_{n+\alpha} (\alpha=1, \dots, n)$, \mathcal{D} 为 \mathbb{R}^n 中一域, $b\mathcal{D} \in C^2$, $b\mathcal{D}$ 由下式定义:

$$F(u_1, \dots, u_{2n}) = 0.$$

如 (0.3.5) 所介绍的, Bochner-Martinelli 核是一种 Cauchy-Fantappiè 核, 它定义为

$$K_{(2n-1)}(z, \zeta) = \sigma \sum_{\alpha=1}^n (-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \frac{1}{[r(z-\zeta)]^{2n-2}}$$

$$dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge \overline{dz}_1 \wedge \dots \wedge [\overline{dz}_\alpha] \wedge \dots \wedge [dz_n],$$

这里 $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $r(z-\zeta)$ 为 z 与 ζ 的欧氏距离, $\sigma = (n-2)!/(2\pi i)^n$, $[\overline{dz}_\alpha]$ 表示缺掉 \overline{dz}_α 这一项.

若 $f(z)$ 在 \mathcal{D} 解析, 在 $\overline{\mathcal{D}}$ 连续, 则有 Cauchy 公式

$$f(w) = \int_{b\mathcal{D}} f(z) K_{(2n-1)}(z, w), \quad z \in \mathcal{D}.$$

Bochner-Martinelli 核尽管有此再生性质, 但由于此核不再是 w 的解析函数, 所以由此核所定义的 Cauchy 型积分 (或称 Bochner-Martinelli 型积分) 不再是解析函数了.

若 $b\mathcal{D}$ 为可定向的、光滑的、属于 C^2 的流形, $f(z)$ 为在 $b\mathcal{D}$ 上定义的连续复值函数, 且满足 Lipschitz 条件. 于是关于 Cauchy 型积分

$$F(w) = \int_{b\mathcal{D}} f(z) K_{(2n-1)}(z, w),$$

陆启铿与钟同德 [1] 证明了如下的 Plemelj 公式:

当 w 从 \mathcal{D} 域内部沿着非切线方向趋于点 $w_0 \in b\mathcal{D}$ 时, 有

$$F_+(w_0) = \text{v. p.} \int_{b\mathcal{D}} f(z) K_{(2n-1)}(z, w_0) + \frac{1}{2} f(w_0),$$

当 w 从 \mathcal{D} 域外部沿着非切线方向趋于点 $w_0 \in b\mathcal{D}$ 时, 有

$$F_s(w_0) = \text{v. p.} \int_{b\mathcal{D}} f(z) K_{(2n-1)}(z, w_0) - \frac{1}{2} f(w_0).$$

这里 $\text{v. p.} \int_{b\mathcal{D}}$ 的定义为 $\lim_{s \rightarrow 0} \int_{b\mathcal{D} - b\mathcal{D} \cap S_s(w_0)}$, 而 $S_s(w_0)$ 为

$$(u - w_0) (\overline{u - w_0})' < s^2, \quad u = (u_1, \dots, u_n).$$

我们同样可以提出这样的问题, 对于 Bochner-Martinelli 型积分, 是否可以有多种的 Cauchy 主值的定义方法, 而 $\frac{1}{2}$ 的值也将由各种不同的定义方法得到的相应的不同值所替代?

答案是否定的.

其理由是: 在上述定理的证明过程中, 在 w_0 的附近挖去的邻域为 $b\mathcal{D} \cap S_s(w_0)$, 如果挖去的不是 $b\mathcal{D} \cap S_s(w_0)$, 而是另一个邻域 $b\mathcal{D} \cap M_\delta(w_0)$, 那末我们可以取 δ 充分小, 使得

$$b\mathcal{D} \cap M_\delta(w_0) \subset b\mathcal{D} \cap S_s(w_0).$$

由于 Bochner-Martinelli 核在整个空间 (除去 $w = w_0$ 一点外) 都有定义, 且同调于零, 故由 Stokes 公式, 在 $b\mathcal{D} \cap S_s(w_0)$ 上的积分与在 $b\mathcal{D} \cap M_\delta(w_0)$ 上的积分是相等的. 也就是说, 不论怎样取 w_0 的邻域来定义 Cauchy 型积分, 都得到的是相同的结果, 这与一个复变数时的 Cauchy 核 $\frac{1}{z - \zeta}$ 的情形是完全一样的.

关于 Bochner-Martinelli 型积分, 钟同德以及其他一些同志还做过很多研究, 有兴趣的读者可以参阅他们的工作.

参 考 文 献

史济怀

- [1] 关于超球的 Cauchy 型积分, 中国科技大学学报 10(1980), 1~9.

华罗庚

- [1] 多复变数函数论中的典型域的调和分析, 1958, 科学出版社.

华罗庚、陆启铿

- [1] Theory of Harmonic Functions in Classical Domains, Scientia Sinica 8 (1959) 1031~1094.

吴新谋等

- [1] 数学物理方程第三册, 1959, 科学出版社.

孙继广

- [1] 复超球面上奇异积分方程的正则化, 1979, 厦门大学数学系.

陆启铿、钟同德

- [1] Привалов 定理的拓广, 数学学报 7(1957), 144~165.

龚 昇

- [1] 多复变数典型域的 Cauchy 型积分(I), 中国科学技术大学建校五周年纪念论文集(1963), 23~25.
 [2] A remark on integral of Cauchy type in several complex variables, Proceeding of 1st symposium of differential equations and differential geometry, 1980.
 [3] 酉群上的富理埃分析 III, 数学学报 13(1963), 152~161.

龚 昇、孙继广

- [1] 圆型域中的解析函数的积分表示, 中国科学技术大学学报 1(1965), 219~226.
 [2] 多复变数的 Cauchy 型积分 (I), 超球的 Cauchy 型积分, 数学学报 15 (1965), 431~443.
 [3] 多复变数的 Cauchy 型积分 (II), Lie 球双曲空间的 Cauchy 型积分, 数学学报 15(1965), 775~799.
 [4] 多复变数的 Cauchy 型积分 (III), 矩阵双曲空间的 Cauchy 型积分, 数学学报 15(1965), 800~811.
 [5] 复超球面上的奇异积分方程, 数学学报 16(1966), 194~210.

龚 昇、史济怀

- [1] 关于多复变数可递域的 Poisson 公式的一点注记, 中国科学技术大学学报 2(1966), 16~20.
 [2] Singular integrals in several complex variables I, On integral of

Henkin type, Chinese Annals of Mathematics, 1982.

- [3] 多复变数的奇异积分 II, Hadlamard 主值, 数学年刊(将发表).
- [4] 多复变数的奇异积分 III, 典型域的 Cauchy 型积分, 数学年刊(将发表).
- [5] 多复变数的奇异积分 IV, 超球面上的 Cauchy 型积分的导数, 数学年刊(将发表).

Alt, W.

- [1] Singuläre Integrale mit gemischten Hologemitäten auf Mannigfaltigkeiten und Anwendungen in der Funktionentheorie, Math. Z. 137(1974), 227~256.

Bergman, S.

- [1] Kernel function and extended classes in the theory of functions of complex variables, Colloque aux les Fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953.

Bochner, S.

- [1] Classes of holomorphic functions of several variables in circular domains, Pro. Nat. Acad. Sci. 46(1960), 720~723.

Boutet de Monvel and Sjöstrand J.

- [1] Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö, Soc. Mat. de France, Asterisque 34~35(1976), 123~164.

Fefferman, C.

- [1] The Bergman kernel and biholomorphic mappings of strictly pseudoconvex domains, Inventiones Mat. 26(1974), 1~66.

Folland G. and Stein E. M.

- [1] Estimates for the $\bar{\partial}$ complex and analysis on Heisenberg group, Comm. Pure Appl. Math. Vol. XXVII(1974), 429~522.

Fox, C.

- [1] A generalization of the Cauchy principal value, Canadian J. Math. 9(1957), 110~117.

Hadamard, J.

- [1] Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, 1956.

Kerzman, N.

- [1] Singular integrals in complex analysis, Proceeding of symposia in pure Mathematics, XXXV(1979), 3~41.

Kerzman N. and Stein E. M.

- [1] The Szegö kernel in terms of Cauchy-Fantappié kernels, Duke Math. J. 45(1978), 197~224.

Koppelman, W.

- [1] The Cauchy integral for functions of several complex variables, Bull.

Amer. Math. Soc. 73(1967), 373~377.

Korányi, A.

- [1] Harmonic functions on Hermitian hyperbolic Space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 135(1969), 507~516.

Koranyi, A. and Vagi S.

- [1] Singular integrals in homogenous spaces and some problems of classical analysis, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 25(1971), 575~648.

Norguet, F.

- [1] Introduction aux fonctions de plusieurs variables complexes: représentations intégrales, *Univ. Paris VII U. E. R. de Math.* (1970~1971).

Peters, A. S.

- [1] The solutions of certain integral equations with kernels $K(z, \zeta)/(z - \zeta)$, *Comm. pure and Appl. Math.* 18(1965), 129~146.

Ramirez de Arellaus, E.

- [1] Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen analysis, *Math. Ann.* 184(1970) 172~187.

Rudin, W.

- [1] *Function theory in unit ball of \mathbb{C}^n* , Springer-Verlag, New York, 1980.

Венуа, Н. П.

- [1] Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, *ИТГИ*(1950).

Гахов, Ф. Д.

- [1] Краевые задачи, *Физматгиз*(1962).

Каничев, В. А.

- [1] Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных, *Уч. зап. Шахтинск, педин-те*, 2:6(1959), 29~90.

Михлин, С. Г.

- [1] Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, 1962.

Мусхелишвили, Н. И.

- [1] Сингулярные интегральные уравнения, Москва 1962.

Хеннин, Г. М.

- [1] Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдо-выпуклых областях и некоторые приложения, *Матем. Сб.*, 78(1969) 4, 611~632.

SERIES OF MODERN MATHEMATICS

Classical Manifold and Classical Domain

By Liu Qi-keng

Differential Geometry of Homogeneous Space

By Gu Chao-Hao

**Measure and Integration Theory on Infinite-dimensional
Spaces; Abstract Harmonic Analysis**

By Xia Dao-xing

Theory of Limit Cycle

By Ye Yan-qian

Computational Geometry

By Su Bu-qing, Liu Ding-yuan

Singular Integral in Several Complex Variables

By Gong Sheng